pokračovanie z predchádzajúceho týždňa

- Člen $\frac{d}{dt}\left(\vec{R}^* \times M\dot{\vec{R}}^*\right)$ sa dá upraviť

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{R}^* \times M\dot{\vec{R}}^*\right) = \dot{\vec{R}}^* \times M\dot{\vec{R}}^* + \vec{R}^* \times \vec{F}_t$$

Prvý je nula lebo je to vektorový súčin paralelných vektorov a druhý dá moment celkovej sily vzhľadom na ťažisko: ten sa odpočíta od celkového momentu $\vec{D}$ na pravej strane,

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega}\right) = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}^*) \times \vec{F}_i \tag{17}$$

t.j. okrem tvaru (12) môžeme druhú pohybovú rovnicu i.t.t. zapísať aj v tvare

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{D}^*, \tag{18}$$

kde $\vec{D}^*$ je výsledný moment síl počítaný **vzhľadom na ťažisko**.

2.6 Tenzor zotrvačnosti

V rámci odvádzania 2. pohybovej rovnice sme si zaviedli **tenzor zotrvačnosti**

$$\vec{\vec{I}} = \sum_i m_i((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i)\vec{\vec{1}} - \vec{a}_i\vec{a}_i). \tag{19}$$

$\vec{\vec{I}}$ môžeme reprezentovať v tvare matice ak vyjadríme polohové vektory všetkých hmotných elementov pomocou ich zložiek, $\vec{a}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$:

$$\begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{20}$$

Metódy výpočtu tenzora zotrvačnosti

1. Numericky, priamym implementovaním definície (20).

2. Pre symetrické a jednoduché telesá možno vypočítať integrovaním, napr. prvý element z (20) ako

$$I_{xx} = \int_V dxdydz\rho(x,y,z)\left(y^2 + z^2\right), \tag{21}$$

   kde $\rho(x,y,z)$ je hustota telesa v mieste $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, pričom integrujeme cez celý objem telesa.

3. Pre teleso pozostávajúce z niekoľkých jednoduchých symetrických telies získame tenzor súčtom tenzorov týchto telies ale vyjadrených vzhľadom na nové ťažisko celkového telesa

$$\vec{\vec{I}} = \vec{\vec{I}}^{(1)} + \vec{\vec{I}}^{(2)} \tag{22}$$

pričom

$$\overset{\rightrightarrows}{I}^{(1)} = \overset{\rightrightarrows}{I}^{(01)} + M_1 \left(\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_{01} \overset{\rightrightarrows}{1} - \vec{r}_{01} \vec{r}_{01} \right) \tag{23}$$

$$\overset{\rightrightarrows}{I}^{(2)} = \overset{\rightrightarrows}{I}^{(02)} + M_2 \left(\vec{r}_{02} \cdot \vec{r}_{02} \overset{\rightrightarrows}{1} - \vec{r}_{02} \vec{r}_{02} \right), \tag{24}$$

kde $\overset{\rightrightarrows}{I}^{(01)}$ je tenzor zotrvačnosti prvého telesa vzhľadom na jeho ťažisko, $\vec{r}_{01}$ je vektor spájajúci ťažisko celého spojeného telesa a ťažisko prvého telesa a M_1 je hmotnosť prvého telesa; a analogicky pre druhé teleso s indexmi 2.

Matica tenzora zotrvačnosti závisí od voľby orientácie osí (ukázané na otáčaní tenkej tyčky) preto musíme maticu udávať vzhľadom na súradnicovú sústavu pevne spojenú s telesom, ktorú budeme označovať bázovými vektormi $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Táto sústava je ale **neinerciálna** - v pohybových rovniciach musíme uvážiť že tieto bázové vektory sa otáčajú v čase. Matematike ktorá takéto otáčanie popíše sa budeme venovať v nasledujúcej časti.

2.7 Prechod medzi súradnicovými sústavami

Konvencie

Budeme používať značenia:

- rotácia okolo 3. bázového vektora ($\vec{k}$) o uhol ϕ bude

$$\mathscr{O}^{\phi,3}[\,]$$

- Tri ortogonálne jednotkové vektory budú všeobecne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a špeciálne, v sústave natočenej spolu s študovaným tuhým telesom ako $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Aby sme nemuseli písať tri vektory, tak jednoducho budeme písať $\vec{f}_i$ alebo $\vec{e}_j$ a pod.

- Einsteinovo sumačné pravidlo: cez dva súčinitele majúce ten istý index sumujeme, t.j.

$$\sum_i a_i b_i \text{ budeme písať ako } a_i b_i$$

zložky vektora $c_i, i = 1,2,3$ ktoré vzniknú násobením matice

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

s zložkami iného vektora $a_i, i = 1,2,3$ budeme písať

$$c_i = M_{ij} a_j$$

kde vlastne máme 3 rovnice (pre $i = 1,2,3$) a cez j je myslené sumovanie.

Zavedenie rotácie a základné princípy

Geometricky, otočenie vektora $\vec{p}$ chápeme ako lineárne zobrazenie, v ktorom vektoru $\vec{p}$ priradíme iný vektor $\vec{q}$ pomocou predpisu

$$\vec{p} \to \vec{p}' : \vec{p}' = \mathscr{O}[\vec{p}]. \tag{25}$$

pričom veľkosť vektora ostane nezmenená, $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$.

Rotácia je lineárna operácia, t.j.

$$\mathscr{O}[\vec{p}+\vec{q}] = \mathscr{O}[\vec{p}] + \mathscr{O}[\vec{q}] \tag{26}$$

Ak chceme nájsť zložky zrotovaného vektora v báze $\vec{e}_i$ potom premietaním do týchto smerov máme

$$p_i' = \vec{p}' \cdot \vec{e}_i = \mathscr{O}[\sum_j p_j \vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i = \sum_j p_j \mathscr{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \tag{27}$$

Na cvičení sme ale našli maticu, ktorá transformuje súradnice rotovaného vektora, t.j.

$$p_i' = \sum_j R_{ij} p_j \tag{28}$$

t.j. vidíme že

$$R_{ij} = \mathscr{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \tag{29}$$

a pretože

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

platí tiež

$$\mathscr{O}[\vec{e}_j] = \sum_n R_{nj} \vec{e}_n = R_{nj} \vec{e}_n$$

(sumačná konvencia!!!), čo budeme veľmi veľa krát využívať!

Ak je rotácia otáčanie okolo $\vec{e}_3$ o uhol ϕ, t.j. $\mathscr{O}^{\phi,3}$ potom podľa cvičení

$$R_{ij} = R_{ij}^{\phi,3} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

V prípade otáčania okolo $\vec{e}_1$ alebo $\vec{e}_2$ budú prirodzene platiť podobné transformačné matice, len s permutovanými riadkami a stĺpcami:

$$R_{ij}^{\phi,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$R_{ij}^{\phi,2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{32}$$