2.3 Úvodné myšlienky k pohybovým rovniciach i.t.t.

Základný pohybový zákon (v rámci nerelativistickej a nekvantovomechanického popisu) je Newtonov pohybový zákon pre hmotný bod:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{F}. \tag{6}$$

I.t.t. nie je hmotný bod a preto rozložíme i.t.t. na infinitezimálne časti s hmotnosťami m_i a polohovými vektormi $\vec{r}_i$.; akcia-reakcia medzi nepohybujúcimi sa časťami $\vec{F}_{ij}$ ("krátko-dosahové sily") a externé sily $\vec{F}_i$ (napr. gravitačná); tým získame N pohybových rovníc pre kažý jeden hmotný element:

$$m_i\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}, \quad i = 1,...,N \tag{7}$$

V skutočnosti ale potrebujeme len 12 rovníc pre všetky stupne voľnosti i.t.t.

2.4 1. pohybová rovnica i.t.t. - o pohybe ťažiska

Spočítame všetky rovnice v (7), výsledok je

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}^* \quad = \quad \vec{F} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

kde sme zaviedli výslednicu všetkých vonkajších síl,

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \tag{10}$$

a **ťažisko i.t.t.**:

$$\vec{R}^* = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{11}$$

Príklady polohy ťažísk, integrálny vzorec, výpočet kombinovaním dvoch telies pre ktoré poznáme polohu ťažiska.

2.5 2. pohybová rovnica i.t.t. - o otáčaní i.t.t.

Odvodenie, s výsledkom:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{R}^* \times M\dot{\vec{R}}^*\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}\right) \quad = \quad \vec{D} \tag{12}$$

Komentár:

- Výsledný moment sily je definovaný **vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu**, t.j.

  $$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{13}$$

  pričom zahŕňa externé sili pôsobiace v miestach daných polohovými vektormi $\vec{r}_i$; typicky toto predstavuje sumu relatívne malého konečného počtu členov (uchytená pružina, silové pôsobenie kontaktnej sily v mieste dotyku, etc.)

- Moment gravitačných síl sa dá napísať ako

$$\vec{D}_g = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \vec{R}^* \times m\vec{g}, \tag{14}$$

kde sme použili definíciu ťažiska. Rovnica 14 hovorí že moment gravitačných síl počítame akoby celá tiaž pôsobila v ťažisku i.t.t.

- Úprava člena na ľavej strane vedúceho k tenzoru zotrvačnosti:

$$\begin{aligned}
\vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega} &= \sum_i \vec{a}_i \times dm_i (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) \\
&= \sum_i dm_i \left(\vec{\omega}(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) - \vec{a}_i(\vec{\omega} \cdot \vec{a}_i) \right) \\
&= \sum_i dm_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i)\vec{\vec{1}} - \vec{a}_i \vec{a}_i) \cdot \vec{\omega}
\end{aligned}$$

kde sme zaviedli **jednotkový tenzor**

$$\vec{\vec{1}} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}, \tag{15}$$

s vlastnosťou $\vec{\vec{1}} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega}$. a **tenzor momentu zotrvačnosti i.t.t.**

$$\vec{\vec{I}} = \sum_i dm_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i)\vec{\vec{1}} - \vec{a}_i \vec{a}_i). \tag{16}$$

$\vec{\vec{I}}$ môžeme reprezentovať v tvare matice ak vyjadríme polohové vektory všetkých hmotných elementov pomocou ich zložiek, $\vec{a}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$:

$$\begin{pmatrix} \sum_i dm_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i dm_i x_i y_i & -\sum_i dm_i x_i z_i \\ -\sum_i dm_i y_i x_i & \sum_i dm_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i dm_i y_i z_i \\ -\sum_i dm_i z_i x_i & -\sum_i dm_i z_i y_i & \sum_i dm_i (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{17}$$