Cvičenia z Fyziky dynamických procesov

Peter Bokes, zima 2005.

Príklady či komentáre označené ### neboli urobené na cvičeniach a vyznačujú sa vyššou obtiažnosťou. Tieto sú uvádzané len ako zaujímavosť pre zaujímajúcich sa študentov.

26/09/2005

1. Skalárny súčin, skalárny súčin jednotkových vektorov a priemet vektora do smeru.
2. Najdite (cez skalárny súčin) veľkosť tangenciálnej zložky gravitačnej sily pôsobiacej na gorálku upevnenú na vertikálnu kružnicu. (najprv nájdite tvar dotykového vektora, parameticky vyjadreného od uhla dávajúceho polohu gorálky na kružnici.
3. Vektorový súčin, vektorový súčin jednotkových vektorov a veľkosť plochy danej 2 vektormi.
4. Presvedčte sa, že ľubovoľný vektor $\vec{r}$ môžeme rozložiť na vektory v smere $\vec{e}$ a v smere kolmom na $\vec{e}$ pomocou vzťahu
$$\vec{r} = (\vec{e}\cdot\vec{r})\vec{e} + \vec{e}\times(\vec{r}\times\vec{e}).$$
5. Nech $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{c}$ sú lineárne nezávislé vektory. Dokážte, že
   - $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
   - $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$
6. (Zo skrípt str.8/pr.3) Vyjadrite časovú deriváciu vektora s konštantnou dĺžkou pomocou vektora okamžitej uhlovej rýchlosti.
   Re: $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

   Extra: Geometrické odvodenie.

03/10/2005

1. (Zo skrípt str.7/pr. 1) Dokážte že moment dvojice síl nezávisí od bodu, vzhľadom na ktorý ho definujeme.

   Extra: Diskusia ku aplikácii na piškótu s dvomi symetrickými ohniskami. Nech moment dvojice síl pôsobí okolo prvého ohniska. Aký bude rozdiel v dynamike ak otáčame okolo prvého resp. druhého ohniska ak pritom nezmeníme pôsobenie momentov?

2. (Zo skrípt str.11/pr.4) Ukážte, že redukcia síl nemení pohybové rovnice tuhého telesa

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \boldsymbol{D}^{(1)} + \boldsymbol{D}^{(2)}$$

   kde $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{(1)}$ a $\boldsymbol{D}^{(2)}$ sú súčty síl, momentov síl a dvojice síl.

3. Za predpokladu že tenzor zotrvačnosti nezávisí od času, prepíšte II. impulzovú vetu do zložkového tvaru. Presvečte sa, že tenzorovo-vektorový zápis je ekvivalentný maticovo-stĺpcovému, t.j. že

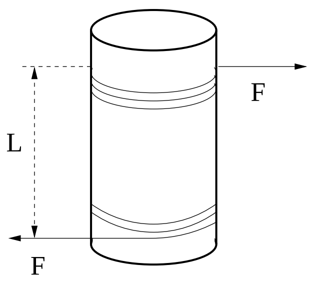
$$\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{D},$$

   kde $\overleftrightarrow{I} = I_{xx}\boldsymbol{ii} + I_{xy}\boldsymbol{ij} + \ldots$, je ekvivalentné rovnici

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}.$$

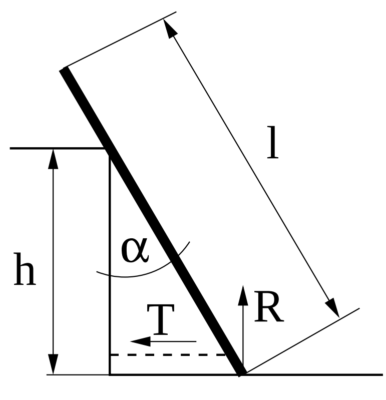
   Extra: Uvedomme si že moment zotrvačnosti závisí od natočenia súradnicovej sústavy vzhľadom na teleso. Preto $\vec{\phi}(t)$ zároveň udává tvar momentu zotrvačnosti (jeho kontinuálnu transformáciu) a teda ide vo všeobecnosti o *nelineárnu* diferenciálnu rovnicu.

4. Nájdite veľkosť a smer počiatočného uhlového zrýchlenia valčeka s polomerom R ako funkciu momentov zotrvačnosti valca I_{zz} a I_{xx}, ak vzdialenosť medzi vláknami cez ktoré pôsobí dvojica síl (viď. obr.) je L.
   Re: $|\varepsilon| = F\sqrt{\frac{L^2-4R^2}{I_{xx}^2} + \frac{4R^2}{I_{zz}^2}}$.



5. Akou silou T je napínané lanko a aká je sila reakcie podložky R ak je homogénny hranol s tiažou G nehybný v uvedenej situácii na obrázku?
   Re:

$$\begin{aligned} T &= \frac{Gl}{4h}\cos(\alpha)\sin(2\alpha) \\ R &= G - \frac{Gl}{4h}\sin(2\alpha)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

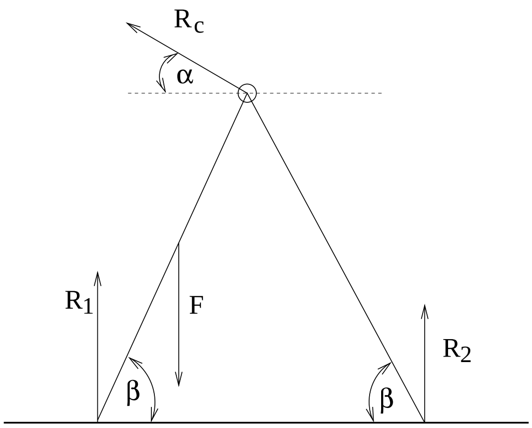


6. Uvažujte rebrík opretý o stenu. Koeficient trenia medzi rebríkom a stenou je k_1 and medzi rebríkom a podlahou k_2. Aký je minimálny uhol medzi rebríkom a podlahou aby sa rebrík nekĺzal po dlážke?
   Re:

$$\tan(\alpha) = \frac{1 - k_1 k_2}{2k_2}$$

10/10/2005

1. Aké sú sily reakcie R_1, R_2, R_c pre rovnovážnu situáciu na obrázku ak tyče 1 a 2 sú spojené otočným kĺbom? (Situácia predstavuje stabilitu človeka s tiažou F na rebríku).
Re: $\alpha = \beta$, $R_c = \frac{F}{4\sin(\beta)}, R_1 = \frac{3}{4}F, R_2 = \frac{1}{4}F$
Extra: Uvažujme, že aj na pravé rameno pôsobí tiaž G. Ako sa zmení platnosť získaných výsledkov? Prečo sme vedeli v píklade 4 na predchádzajúcej strane smer sily reakcie schodu a tu *a priori* nevieme?



2. (Zo skrípt str.14/pr. 5) Dokážte Steinerovu vetu. (Zahŕňa úvod ku momentu zotrvačnosti, diskusia rovnice $J\varepsilon = D$, prip. o tenzorovom charaktere J)

3. (Zo skrípt str.15/pr.6) Vypočítajte moment zotrvačnosti valca.
Re: $J = \frac{1}{2}MR^2$
Extra: Diskusia valenia sa nespenenej a spenenej pivovej plechovky, viď tiež `http://kf-lin.elf.stuba.sk/chat/` téma 6.

4. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej gule.
Re:
$$J = \frac{2}{5}MR^2$$
Prácu si zjednodušíme, si uvedomíme že $J = \frac{1}{3}(J_x + J_y + J_z)$ pričom vzťahy pre jednotlivé J_α napíšeme v tom istom kartézskom súradnicovom systéme.

17/10/2005

1. (Zo skrípt str.23/pr.11) Uvažujme fyzikálne kyvadlo, vychýlené o uhol $-\phi\vec{k}$ z hornej nestabilnej rovnovážnej polohy. Aké zrýchlenie a musíme udeliť celej sústave aby bola uvedená situácia stabilná?

   Re: $\tan(\phi) = a/g$.

2. (Zo skrípt str.20/pr. 8) Na rovnomerne otáčajúcej sa doske leží vo vzdialenosti r' od osi otáčania teleso, v pokoji vzhľadom na dosku. (A) Aká sila na teleso pôsobi v sústave pevne spojenej s okolím? (B) Ak je teleso v pokoji vzhľadom na okolie, aká zdanlivá sila naň pôsobí v sústave pevne spojenej s doskou?

   Re: (A) $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}'$, (B) $\vec{F}' = -m\omega^2\vec{r}'$.

3. (Zo skrípt str.21/pr.9) Okolo vodorovnej osi sa otáča úzka nádobka (s výškou vody h, polomerom podstavy R) s vodou (hustota ρ). Pri akej uhlovej rýchlosi nám kvapalina nebude vytekať? [Tento príklad je lepšie preformulovať ako vypadnutie jabĺčka z voľne otvorenej tašky....]

   Re: $Mg = \pi\rho\omega^2\frac{1}{2}R^2h^2$

   Extra: Ako to bude s povrchom rotujúcej kvapaliny (toto sme v našom príklade zanedbali)? Prečo sú citrónové semienka v strede točiaceho sa čaju?

4. Aká bude frekvencia vlastných kmitov (s malou výchylkou) závažia upevnenom na zvislej natiahnutej pružine obmedzenom na horizontálny pohyb?

24/10/2005

1. Odvoď'te Lagrangeove pohybové rovnice pre hmotný bod. (str.25/kapitolka 2.1) + diskusia o formalizme so zovšeobenenými súradnicami a rýchlosťami. Bez dôkazu spomeň variačný princíp $\delta\int dt L(q(t),\dot{q}(t),t)=0$.

2. (Zo skrípt str.26/pr.12) Napíšte Lagrangeove rovnice pre dvojrozmerný pohyb hmotného bodu v gravitačnom poli v polárnych súradniciach a ukážte že tieto sú ekvivalentné Newtonovej pohybovej rovnici.

3. (str.34/kapitola 2.2.1) Nájdite Lagrangeovu funkciu dvojitého matematického kyvadla.

4. ### Ukážeme, že Lagrangeove rovnice sú nezávislé od zvolených súradníc. Nech v súradniciach $\{q_i\}_{i=1}^N$ máme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad i=1,..,N \tag{1}$$

Nech existujú iné súradnice $\{p_j\}_{j=1}^N$ dané jedno-jednoznačný zobrazením

$$\begin{aligned} p_j &= p_j(\{q_i\}) && (2)\\ \dot{p}_j &= \sum_k \frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k}\dot{q}_k && (3)\end{aligned}$$

V nich vyjadríme Lagrangeovu funkciu

$$L(\{p_j\},\{\dot{p}_j\})=L\left(\{p_j(\{q_i\})\},\{\sum_k\frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k}\dot{q}_k\}\right) \quad (=L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\})) \tag{4}$$

Pre dosadenie do rovnice (1) potrebujeme poznať nasledovné derivácie

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}+\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\left(\sum_k\frac{\partial^2 p_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k\right) && (5)\\ &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}+\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\left(\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i}\right) && (6)\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} && (7)\end{aligned}$$

Dosadením do (1) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i}\right) &= 0 && (8)\\ \sum_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}-\frac{\partial L}{\partial p_j}\right)\frac{\partial p_j}{\partial q_i} &= 0 && (9)\end{aligned}$$

z čoho priamo dostávame že výraz v zátvorkách musí byť nulový [1] t.j. Lagrangove rovnice platia aj v nových súradniciach.

PS: Pre $N=1$ odprednášané.

[1]matica $\partial p_j/\partial q_i$ musí mať inverznú maticu čo je splnené pre jedno-jednoznačné transformácie súradníc.

31/10/2005
Dekanské voľno/cvičenia zrušené

07/11/2005
Prvá zápočtovka.

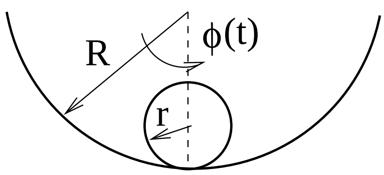
14/11/2005

1. Nájdite Lagrangeove rovnice bodu uchyteného na kružnici a zároveň spriahnutého s natiahnutou pružinou medzi ním a pevným bodom mimo kružnice. Predpokladajte že aj pri minimálnej vzdialenosti medzi pohyblivým bodom a bodom upevnenia pružiny je posledná v napnutom stave. Aká bude frekvencia malých kmitov?

   Dobrá rada: Vyjadriť si všetko cez vektory v 2D.

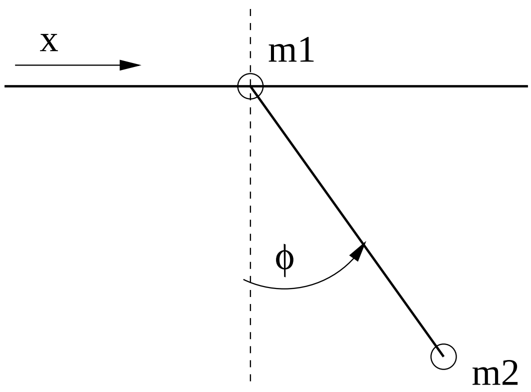
   Re: $\omega = \sqrt{\frac{F(l+R)}{mlR}}$ kde F je sila napínajúca pružinu v minimálnej vzdialenosti, l táto vzdialenosť, R polomer kružnice a m hmotnosť bodu.

2. Nájdite Pohybovú rovnicu pre kmity ťažiska valca s polomerom r vo valcovom žľabe s polomerom $R > r$. Kmity uvažujte ako otáčanie okolo myslenej osi valcového žľabu.
   Re:



$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{mg(R-r)}{m(R-r)^2 + I\frac{(R-r)^2}{r^2}}\phi(t)$$

3. Nájdite pohybové rovnice pre $x(t)$ a $\phi(t)$ pre systém na obrázku. Podiskutujme ako sa prejavujú vety o tažisku...
   Re: $L(x,\dot{x},\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{\phi}\dot{x}\cos(\phi)) + m_2 gl\cos(\phi)$



21/11/2005

1. Na dvoch vertikálnych lankách s dĺžkou l je vodorovne zavesená os s otočným valcom. Aká bude frekvencia kmitov a sa bude valcec hojdať na lankách v smere kolmom na jeho os? Kvalitatívne, na základe pohybových rovníc popíšte kmity ak otáčaniu valca okolo svojej osi bráni moment síl $D_\theta = -k\theta$.

   Re: Lagrangeova funckia je $L(\dot{\phi}, \phi, \dot{\theta}, \theta) = E_K - U$. Kinetickú energiu dostaneme ako súčet cez hmotné elementy m_n.
   $$E_K = \frac{1}{2}\sum_n m_n \left|\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}\right|^2$$
   Pre rýchlosť elementu máme
   $$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \dot{\phi}\mathbf{k}\times\mathbf{l} + (\dot{\phi}\mathbf{k}+\dot{\theta}\mathbf{k})\times\mathbf{a}_n$$
   z čoho veľkosť je
   $$\left|\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}\right|^2 = l^2\dot{\phi}^2 + (\dot{\phi}+\dot{\theta})^2\left|\mathbf{k}\times\mathbf{a}_n\right|^2 + \mathbf{a}_n\cdot\mathbf{F}$$
   kde $\mathbf{F}$ je od n nezávislý vektor. Keďže $\sum_n \mathbf{a}_n = 0$, posledný člen pri sumovaní cez n vypadne. Použitím definície pre moment zotrvačnosti
   $$J = \sum_n m_n \left|\mathbf{k}\times\mathbf{a}_n\right|^2$$
   a uvážením potenciálnej enerie
   $$U = -mgl\cos(\phi)$$
   [definujeme celkovú hmotnosť ako $m = \sum_n m_n$] nakoniec máme
   $$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 + mgl\cos(\phi).$$
   V prípade uváženia momentu D_θ je Lagrangeova funkcia daná
   $$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 + mgl\cos(\phi) - \frac{1}{2}k\theta^2.$$
   Zvyšok príkladu už dorobíme podľa štandartnej schémy...

2. ### Uvažujte zotrvačník s rotačnou osou v horizontálnej polohe. Táto os nech je na jednom konci upevnená v nemennej výške a to tak, že sa dokáže okolo tohto upevnenia otáčať horizontálne i vertikálne. Aká bude frekvencia malých kmitov osi zotrvačníka okolo horizontálnej roviny? [No, dáme dokopy aspoň Lagrangeovu funkciu.]

   Re: Skonštruujeme si Lagrangeovu funkciu $L(\dot{\alpha}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}) = E_K - U$. Kinetická energia je daná súčtom kinetických energií hmotných elementov m_n. Pre rýchlosť elementu máme
   $$\begin{aligned}\mathbf{v}_n &= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_n + \frac{d\mathbf{l}}{dt}\\ |\mathbf{v}_n|^2 &= |\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_n|^2 + \left|\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right|^2\\ \left|\frac{d\mathbf{l}_0}{dt}\right|^2 &= l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\end{aligned}$$

kde sme uvážili že pri sumovaní cez n dá zmiešaný člen nulový príspevok.

Vektor uhlovej rýchlsti $\boldsymbol{\omega}$ má zložky

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega^i \mathbf{e}_i = \dot{\alpha}\mathbf{e}_1 + \dot{\phi}\left\{\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2\right\} + \dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

kde $\mathbf{e}_i$ sú jednotkové vektory v sústave orientovanej podľa aktuálnej polohy zotrvačníka ale pre každý okamžik času nehybnej (a teda inerciálnej). Pre kinetickú energiu nakoniec dostávame

$$E_K = \sum_n \frac{1}{2} m_n |\mathbf{v}_n|^2 = \frac{1}{2} \sum I_{ij} \omega^i \omega^j + ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)$$

kde sme použili tenzor momentu zotrvačnosti

$$I_{ij} = \sum_n m_n (\mathbf{e}_i \times \mathbf{a}_n) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{a}_n) = J\delta_{ij}\delta_{i1} + I'\delta_{ij}(1 - \delta_{i,1})$$

pričom sme uvážili, že jednotkové vektory $\mathbf{e}_i$ predstavujú zo symetrie jeho hlavné osi, a teda tento tenzor je automaticky v diagonálnom tvare. Okrem toho, ako obyčajne,

$$m = \sum_n m_n.$$

Potenciálna energia je jednoduchá,

$$U(\theta) = mgl\cos(\theta)$$

a nakoniec dostávame

$$L = \frac{1}{2} J(\dot{\alpha} + \dot{\phi}\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2} I\left(\dot{\theta}^2 + (\sin(\theta)\dot{\phi})^2\right) - mgl\cos(\theta)$$

kde $I = I' + ml^2$.

28/11/2005

1. Dva príklady o hromadení materiálu (t.j. bilančné rovnice), proporcionálnej regulácii a riešenie rovníc popisujúcich ich dynamiku pomocou Laplaceovej transformácie. Príklady sú kompletne riešené v skriptách. (str.71/pr. 19)

2. (str.72/pr. 20) Posledný výsledok v skriptách má chybyčku, správny je

$$\phi_H(t) = \frac{b}{K}\left\{\left(1-e^{-\frac{K}{T_0}t}\right)1(t) - \left(1-e^{-\frac{K}{T_0}(t-a)}\right)1(t-a)\right\} + \phi_H(0)e^{-\frac{K}{T_0}t}$$

3. Nájdite funkčný predpis pre tvar povrchu rotujúcej ideálnej kvapaliny, otáčajúcou sa konštantnou rýchlosťou.
Re: priamo z pohybovej rovnice ideálnej kvapaliny, napísanej v neinerciálnej sústave, pevne spojenej s kvapalinou máme

$$\nabla p(z,r) = -\rho g\vec{k} + \vec{r}\omega^2 \tag{10}$$
$$p(z,r) = -\rho g z + \frac{1}{2}r^2\rho\omega^2 + const \tag{11}$$

Uvážením že pre povrch máme $p(z,r) = p_a$, dostaneme

$$z(r) = z_0 + \frac{1}{2g}r^2\omega^2$$

4. ### Z fyzikálneho zmyslu a definície časovej zmeny tenzora deformácie ukážte že

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho(r)}\frac{d\rho(r)}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\,\overleftrightarrow{\varepsilon} = \nabla\cdot\vec{v}$$

kde $\mathrm{Tr}\,\overleftrightarrow{\varepsilon} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}$ je stopa matice $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

5. ### Dokážte že $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \nabla\frac{1}{2}v^2 - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$

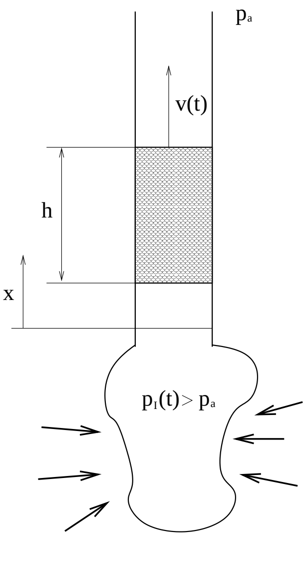
5/12/2005

Dva príklady na použitie kombinácie bilančnej rovnice a Bernoulliho rovnice. A jeden na vytláčanie kvapaliny z trubky.

1. Str. 94/Pr. 24

2. Str. 95/Pr. 25

3. ### Nájdite časovo-priestorovú závislosť rýchlosti a tlaku pri vytláčaní ideálnej kvapaliny vertikálnou trubicou použitím Bernoulliho rovnice. Predpokladajte že pre $t = 0$ bola kvapalina s výškou stĺpca v pokoji. Po-



Re: Ide o jednorozmerný problém, Laplaceova rovnica pre rýchlostný potenciál dá v priestore zaplnenom kvapalinou

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \rightarrow \Phi(x) = -v(t)(x - x_0(t)) + b(t)$$

kde $x_0(t)$ je súradnica dolnej hrany kvapaliny.
Pre zovšeob. Bernoulliho rovnicu na dolnej hrane kvapaliny platí

$$\dot{v}0 - \frac{dvx_0 + b}{dt} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p_1(t)}{\rho} + gx_0 = c(t)$$

dobne pre hornú hranu máme

$$\dot{v}h - \frac{dvx_0 + b}{dt} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p_a}{\rho} + g(h + x_0) = c(t).$$

Ich odpočítaním dostaneme

$$\dot{v} = \frac{1}{\rho h}\left(p_1(t) - p_a - gh)\right) = \frac{1}{\rho h}\Delta p(t),$$

výsledok ekvivalentný úvahou o dynamike ideálne tuhého telesa.

Ak si teraz označíme

$$C(t) = -\frac{d(vx_0 + b)}{dt} + \frac{1}{2}v^2 + gx_0 - c(t) = -\frac{p_1(t)}{\rho}$$

Dostaneme z Bernoulliho rovnice závislosť tlaku od (x,t):

$$\dot{v}x + \frac{p(x,t)}{\rho} + gx = \frac{p_1(t)}{\rho}$$

t.j.

$$p(x,t) = p_1(t) - g\rho x - \dot{v}\rho x.$$

Posledný člen je zjavne prejavom zotrvačnej sily.