Cvičenia z Fyziky dynamických procesov

Peter Bokes, zima 2004.

Príklady či komentáre označené ### neboli urobené na cvičeniach a vyznačujú sa vyššou obtiažnosťou. Tieto sú uvádzané len ako zaujímavosť pre zaujímajúcich sa študentov.

30/09/2004

1. (Zo skrípt str.7/pr. 1) Dokážte že moment dvojice síl nezávisí od bodu, vzhľadom na ktorý ho definujeme.

   Extra: Diskusia ku aplikácii na piškótu s dvomi symetrickými ohniskami. Nech moment dvojice síl pôsobí okolo prvého ohniska. Aký bude rozdiel v dynamike ak otáčame okolo prvého resp. druhého ohniska ak pritom nezmeníme pôsobenie momentov?

2. (Zo skrípt str.8/pr.3) Určte časovú deriváciu vektora s konštantnou dĺžkou.
   Re: $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

   Extra: Geometrické odvodenie.

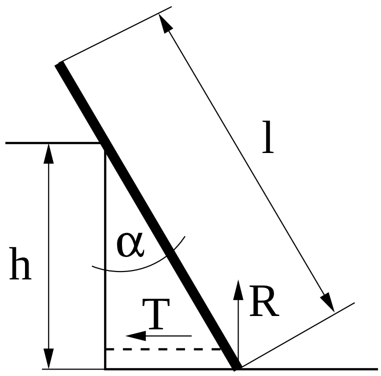
3. (Zo skrípt str.11/pr.4) Ukážte, že redukcia síl nemení pohybové rovnice tuhého telesa

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} &= \boldsymbol{F} \\ \frac{d\boldsymbol{G}}{dt} &= \boldsymbol{D}^{(1)} + \boldsymbol{D}^{(2)} \end{aligned}$$

   kde $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{(1)}$ a $\boldsymbol{D}^{(2)}$ sú súčty síl, momentov síl a dvojice síl.

4. Akou silou T je napínané lanko a aká je sila reakcie podložky R ak je homogénny hranol s tiažou G nehybný v uvedenej situácii na obrázku?
   Re:

$$\begin{aligned} T &= \frac{Gl}{h}\cos(\alpha)\sin(2\alpha) \\ R &= G - \frac{Gl}{h}\sin(2\alpha)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

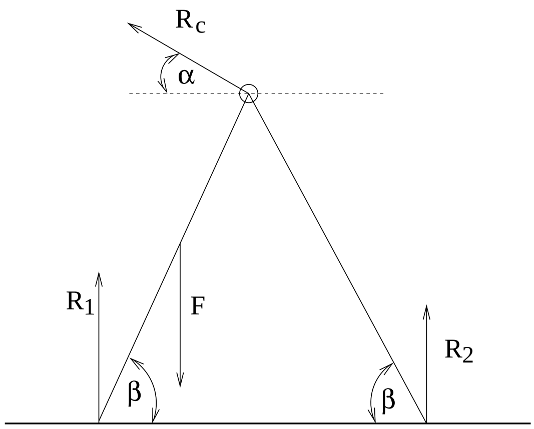


5. Uvažujte rebrík opretý o stenu. Koeficient trenia medzi rebríkom a stenou je k_1 and medzi rebríkom a podlahou k_2. Aký je minimálny uhol medzi rebríkom a podlahou aby sa rebrík nekĺzal po dlážke?
   Re:

$$\tan(\alpha) = \frac{1 - k_1 k_2}{2k_2}$$

08/10/2004

1. Aké sú sily reakcie R_1, R_2, R_c pre rovnovážnu situáciu na obrázku ak tyče 1 a 2 sú spojené otočným kĺbom? (Situácia predstavuje stabilitu človeka s tiažou F na rebríku).
   Re: $\alpha = \beta$, $R_c = \frac{F}{4\sin(\beta)}$, $R_1 = \frac{3}{4}F, R_2 = \frac{1}{4}F$
   Extra: Uvažujme, že aj na pravé rameno pôsobí tiaž G. Ako sa zmení platnosť získaných výsledkov? Prečo sme vedeli v píklade 4 na predchádzajúcej strane smer sily reakcie schodu a tu *a priori* nevieme?



2. (Zo skrípt str.14/pr. 5) Dokážte Steinerovu vetu. (Zahŕňa úvod ku momentu zotrvačnosti, diskusia rovnice $J\epsilon = D$, prip. o tenzorovom charaktere J)

3. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej gule.
   Re:
   $$J = \frac{2}{5}MR^2$$
   Prácu si zjednodušíme, si uvedomíme že $J = \frac{1}{3}(J_x + J_y + J_z)$ pričom vzťahy pre jednotlivé J_α napíšeme v tom istom kartézskom súradnicovom systéme.

4. (Zo skrípt str.20/pr. 8) Na rovnomerne otáčajúcej sa doske leží vo vzdialenosti r' od osi otáčania teleso, v pokoji vzhľadom na dosku. (A) Aká sila na teleso pôsobi v sústave pevne spojenej s okolím? (B) Ak je teleso v pokoji vzhľadom na okolie, aká zdanlivá sila naň pôsobí v sústave pevne spojenej s doskou?

   Re: (A) $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r'}$, (B) $\vec{F'} = -m\omega^2\vec{r'}$.

12/10/2004

1. (Zo skrípt str.15/pr.6) Vypočítajte moment zotrvačnosti valca.

   Re: $J = \frac{1}{2}MR^2$

   Extra: Diskusia valenia sa nespenenej a spenenej pivovej plechovky, viď tiež `http://kf-lin.elf.stuba.sk/chat/` téma 6.

2. (Zo skrípt str.23/pr.11) Uvažujme fyzikálne kyvadlo, vychýlené o uhol $-\phi\vec{k}$ z hornej nestabilnej rovnovážnej polohy. Aké zrýchlenie a musíme udeliť celej sústave aby bola uvedená situácia stabilná?

   Re: $\tan(\phi) = a/g$.

3. (Zo skrípt str.21/pr.9) Okolo vodorovnej osi sa otáča úzka nádobka (s výškou vody h, polomerom podstavy R) s vodou (hustota ρ). Pri akej uhlovej rýchlosi nám kvapalina nebude vytekať? [Tento príklad je lepšie preformulovať ako zmrznutá voda, čo môže z nádobky vykĺznuť.]

   Re: $Mg = \pi\rho\omega^2\frac{1}{2}R^2h^2$

   Extra: Ako to bude s povrchom rotujúcej kvapaliny (toto sme v našom príklade zanedbali)? Prečo sú citrónové semienka v strede točiaceho sa čaju?

4. Aká bude frekvencia vlastných kmitov (s malou výchylkou) závažia upevnenom na zvislej natiahnutej pružine obmedzenom na horizontálny pohyb?

21/10/2004

1. Odvoďte Lagrangeove pohybové rovnice pre hmotný bod. (str.25/kapitolka 2.1) + diskusia o formalizme so zovšeobenenými súradnicami a rýchlosťami. Bez dôkazu spomeň variačný princíp $\delta \int dt L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$.

2. (Zo skrípt str.26/pr.12) Napíšte Lagrangeove rovnice pre dvojrozmerný pohyb hmotného bodu v gravitačnom poli v polárnych súradniciach a ukážte že tieto sú ekvivalentné Newtonovej pohybovej rovnici.

   Extra: Poukázať že pre polárne súradnice, pretože sú lokálne ortogonálne, vieme kinetickú energiu rýchlo.

   ### Extra: Ukážeme, že Lagrangeove rovnice sú nezávislé od zvolených súradníc. Nech v súradniciach $\{q_i\}_{i=1}^N$ máme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, .., N \tag{1}$$

   Nech existujú iné súradnice $\{p_j\}_{j=1}^N$ dané jedno-jednoznačný zobrazením

$$\begin{aligned} p_j &= p_j(\{q_i\}) &(2)\\ \dot{p}_j &= \sum_k \frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k}\dot{q}_k &(3)\end{aligned}$$

   V nich vyjadríme Lagrangeovu funkciu

$$L(\{p_j\}, \{\dot{p}_j\}) = L\left(\{p_j(\{q_i\})\}, \{\sum_k \frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k}\dot{q}_k\}\right) \quad (= L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})) \tag{4}$$

   Pre dosadenie do rovnice (1) potrebujeme poznať nasledovné derivácie

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\left(\sum_k \frac{\partial^2 p_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k\right) &(5)\\ &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\left(\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i}\right) &(6)\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} &(7)\end{aligned}$$

   Dosadením do (1) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i}\right) &= 0 &(8)\\ \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} - \frac{\partial L}{\partial p_j}\right)\frac{\partial p_j}{\partial q_i} &= 0 &(9)\end{aligned}$$

   z čoho priamo dostávame že výraz v zátvorkách musí byť nulový [1] t.j. Lagrangove rovnice platia aj v nových súradniciach.

   PS: Myslím, že na cvičení bude lepšie to ukázať iba pre $N = 1$.

3. (str.34/kapitola 2.2.1) Nájdite Lagrangeovu funkciu dvojitého matematického kyvadla.

[1] matica $\partial p_j / \partial q_i$ musí mať inverznú maticu čo je splnené pre jedno-jednoznačné transformácie súradníc.

28/10/2004

1. Nájdite Lagrangeove rovnice bodu uchyteného na kružnici a zároveň spriahnutého s natiahnutou pružinou medzi ním a pevným bodom mimo kružnice. Predpokladajte že aj pri minimálnej vzdialenosti medzi pohyblivým bodom a bodom upevnenia pružiny je posledná v napnutom stave. Aká bude frekvencia malých kmitov?

   Dobrá rada: Vyjadriť si všetko cez vektory v 2D.

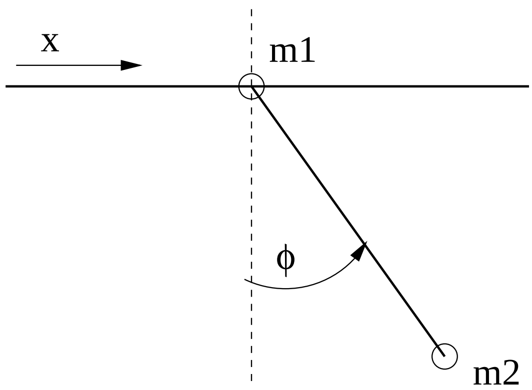
   Re: $\omega = \sqrt{\frac{F(l+R)}{mlR}}$ kde F je sila napínajúca pružinu v minimálnej vzdialenosti, l táto vzdialenosť, R polomer kružnice a m hmotnosť bodu.

2. Nájdite Pohybovú rovnicu pre kmity ťažiska valca s polomerom a vo valcovom žľabe s polomerom $R > a$. Kmity uvažujte ako otáčanie okolo myslenej osi valcového žľabu.

   Re:

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{mg(R-a)}{m(R-a)^2 + I\frac{R^2}{a^2}}\phi(t)$$

3. Nájdite pohybové rovnice pre $x(t)$ a $\phi(t)$ pre systém na obrázku. Podiskutujme ako sa prejavujú vety o ťažisku...
   Re: $L(x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{\phi}\dot{x}\cos(\phi)) + m_2 gl\cos(\phi)$



04/10/2004

1. Na dvoch vertikálnych lankách s dĺžkou l je vodorovne zavesená os s otočným valcom. Aká bude frekvencia kmitov a sa bude valcec hojdať na lankách v smere kolmom na jeho os? Kvalitatívne, na základe pohybových rovníc popíšte kmity ak otáčaniu valca okolo svojej osi bráni moment síl $D_\theta = -k\theta$.

Re: Lagrangeova funckia je $L(\dot{\phi}, \phi, \dot{\theta}, \theta) = E_K - U$. Kinetickú energiu dostaneme ako súčet cez hmotné elementy m_n.

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_n m_n \left| \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \right|^2$$

Pre rýchlosť elementu máme

$$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \dot{\phi}\mathbf{k} \times \mathbf{l} + (\dot{\phi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{k}) \times \mathbf{a}_n$$

z čoho veľkosť je

$$\left| \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \right|^2 = l^2\dot{\phi}^2 + (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \left|\mathbf{k} \times \mathbf{a}_n\right|^2 + \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{F}$$

kde $\mathbf{F}$ je od n nezávislý vektor. Keďže $\sum_n \mathbf{a}_n = 0$, posledný člen pri sumovaní cez n vypadne. Použitím definície pre moment zotrvačnosti

$$J = \sum_n m_n \left|\mathbf{k} \times \mathbf{a}_n\right|^2$$

a uvážením potenciálnej enerie

$$U = -mgl\cos(\phi)$$

[definujeme celkovú hmotnosť ako $m = \sum_n m_n$] nakoniec máme

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + mgl\cos(\phi).$$

V prípade uváženia momentu D_θ je Lagrangeova funkcia daná

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + mgl\cos(\phi) - \frac{1}{2}k\theta^2.$$

Zvyšok príkladu už dorobíme podľa štandartnej schémy...

2. (str.54/pr. 15) Nájdite pohybové rovnice banského výťahu. Zanedbajte pri tom hmotnosť lana a jeho naťahovanie uvažujte iba v elastickom režime [$\frac{\Delta l}{l} = \sigma/E$].

Re: Pretože chceme uvážiť aj sily trenia v motore, kladke aj šachty, nemôžeme použiť iba Lagrangeovu funkciu, pôjdeme na to priamo cez pohybové rovnice. Výsledok je

$$m\frac{d^2l}{dt^2} + b\frac{dl}{dt} + \frac{ES_0}{l^*(0)}\left[l - l_0 + r\phi_1(t)\right] = mg$$

$$J_1\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + ar_3^2\frac{d\phi_1}{dt} = ES_0\left[\frac{R\phi - r\phi_1}{l_1} - \frac{l - l_0 + r\phi_1}{l^*(0)}\right]r$$

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2} + c_{br}\frac{d\phi}{dt} + R\frac{ES_0}{l_1}\left[R\phi - r\phi_1\right] = c_m I$$

3. ### Uvažujte zotrvačník s rotačnou osou v horizontálnej polohe. Táto os nech je na jednom konci upevnená v nemennej výške a to tak, že sa dokáže okolo tohto upevnenia otáčať horizontálne i vertikálne. Aká bude frekvencia malých kmitov osi zotrvačníka okolo horizontálnej roviny? [No, dáme dokopy aspoň Lagrangeovu funkciu, nie?]

Re: Skonštruujeme si Lagrangeovu funkciu $L(\dot{\alpha}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}) = E_K - U$. Kinetická energia je daná súčtom kinetických energií hmotných elementov m_n. Pre rýchlosť elementu máme

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_n &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_n + \frac{d\mathbf{l}}{dt} \\
|\mathbf{v}_n|^2 &= |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_n|^2 + \left|\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right|^2 \\
\left|\frac{d\mathbf{l}_0}{dt}\right|^2 &= l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2
\end{aligned}
$$

kde sme uvážili že pri sumovaní cez n dá zmiešaný člen nulový príspevok.

Vektor uhlovej rýchlsti $\boldsymbol{\omega}$ má zložky

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega^i \mathbf{e}_i = \dot{\alpha}\mathbf{e}_1 + \dot{\phi}\left\{\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2\right\} + \dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

kde $\mathbf{e}_i$ sú jednotkové vektory v sústave pevne spojenej s zotrvačníkom. Pre kinetickú energiu nakoniec dostávame

$$E_K = \sum_n \frac{1}{2} m_n |\mathbf{v}_n|^2 = \frac{1}{2}\sum I_{ij}\omega^i\omega^j + ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)$$

kde sme použili tenzor momentu zotrvačnosti

$$I_{ij} = \sum_n m_n(\mathbf{e}_i \times \mathbf{a}_n)\cdot(\mathbf{e}_j \times \mathbf{a}_n) = J\delta_{ij}\delta_{i1} + I'\delta_{ij}(1-\delta_{i,1})$$

pričom sme uvážili, že jednotkové vektory $\mathbf{e}_i$ predstavujú zo symetrie jeho hlavné osi, a teda tento tenzor je automaticky v diagonálnom tvare. Okrem toho, ako obyčajne,

$$m = \sum_n m_n.$$

Potenciálna energia je jednoduchá,

$$U(\theta) = mgl\cos(\theta)$$

a nakoniec dostávame

$$L = \frac{1}{2}J(\dot{\alpha} + \dot{\phi}\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}^2 + (\sin(\theta)\dot{\phi})^2\right) - mgl\cos(\theta)$$

kde $I = I' + ml^2$.

11/11/2004
Tri príklady o hromadení materiálu (t.j. bilančné rovnice), proporcionálnej regulácii a riešenie rovníc popisujúcich ich dynamiku pomocou Laplaceovej transformácie. Príklady sú kompletne riešené v skriptách.

1. (str.71/pr. 19)
2. (str.72/pr. 20) Posledný výsledok v skriptách má chybyčku, správny je

$$\phi_H(t) = \frac{b}{K}\left\{\left(1 - e^{-\frac{K}{T_0}t}\right)1(t) - \left(1 - e^{-\frac{K}{T_0}(t-a)}\right)1(t-a)\right\} + \phi_H(0)e^{-\frac{K}{T_0}t}$$

3. (str.73/pr. 21) Stačí sa potrápiť pre $n = 3$.

18/11/2004
Tri príklady na použitie kombinácie bilančnej rovnice a Bernoulliho rovnice.

1. Str. 94/Pr. 24
2. Str. 95/Pr. 25
3. Str. 98/Pr. 26