

# Prednášky z Fyziky dynamických procesov

Peter Bokes, zima 2005, 2006.

Aktualizácia: 25. októbra 2006

## 1 Sylaby

### 1. Pohybové rovnice diskretných sústav I.

- Motivácia ku štúdiu - robotika s využitím dynamiky.
- Definícia a vlastnosti tuhého telesa, redukcia síl.
- Odvodenie pohybových rovníc tuhého telesa.

### 2. Pohybové rovnice diskretných sústav II.

- Otáčanie okolo pevnej osi, zavedenie vektora uhla.
- Kinetická a potenciálna energia rotujúceho telesa okolo pevnej osi.
- Pohybová rovnica elektrického stroja.
- Súvislosť medzi kinematickými veličinami vyjadrenými v dvoch rôznych sústavách.

### 3. Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) I.

- LPR pre hmotný bod
- LPR dvojitého matematického kyvadla.
- Fundamentálny obsah Lagrangeovej formulácie: Variačný princíp a kovariancia vzhľadom na ľubovoľnú zámenu premenných.

### 4. Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) II. LPR dvojramenného manipulátora.

### 5. Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) III. LPR dvojramenného manipulátora s plecom.

### 6. Dynamika kontinua I.

- Pojem rýchlostného poľa
- Základná veta kinematiky kontinua

### 7. Dynamika kontinua II.

- Rovnica kontinuity.
- Tenzor napätia
- Pohybová rovnica kontinua

### 8. Hydrodynamika I.

- Prúdenie ideálnej kvapaliny - Bernoulliho rovnica
- Prúdenie stlačiteľnej kvapaliny a plynov

### 9. Hydrodynamika II.

- Dynamická viskozita
- Prúdenie viskózne kvapaliny.
- Teória podobnosti a turbulencia

## 2 Poznámky k jednotlivým prednáškam

Pozor, tieto poznámky boli písané pre moju vlastnú orientáciu sa v prednášanej látke. Nepredstavujú ani pedagogicky vhodný materiál pre štúdium a neobsahujú všetko čo treba vedieť na skúšku. Pre skúšku sú smerodajné okruhy uvedené na konci dokumentu a tomu korešponujúci materiál čo bol odprednášaný.

### 2.1 Pohybové rovnice diskretných sústav I.

Dokonale tuhé teleso, 6 stupňov voľnosti; redukcia síl do jedného bodu a dvojíc síl do dvoch bodov (a k tomu patriaci pojem momentu sily) Toto zahŕňa:

1. redukcia síl pôsobiacich na priamke
2. redukcia síl v rovine ale nie paralelných s opačnou orientáciou
3. zavedenie dvojice síl pre paralelné s opačnou orientáciou
4. redukcia na silu a dvojicu síl pre dve mimobežné sily
5. redukcia ľub. síl v 3 bodoch na sily v dvoch bodoch

; rozloženie telesa na infinitezimálne časti; akcia-reakcia medzi nepohybujúcimi sa časťami ("krátkodosahové sily") a k tomu patriaci fakt že moment týchto síl je 0.

Odvodenie 1. a 2. vety impulzovej; zavedenie vektorového a maticového zápisu pre moment zotrvačnosti tuhého telesa (v súvislosti s momentom hybnosti t.t. a nie ľ.s. 2. vety impulzovej), dôležitosť pri 2. vete že ide o otáčanie okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Komentár - tieto dve rovnice úplne popíšu dynamiku i.t.t. a preto netreba vyššie momenty alebo niečo podobné.

hlavné osi a rotácie tenzora zotrvačnosti (2D rotácia bude potrebná pri 2-ramennom manipulátore) [ 2005 neoprednášané ].

### 2.2 Pohybové rovnice diskretných sústav II.

Otáčanie okolo pevnej osi danej vektorom  $\vec{k}$ , skalárne vynásobíme  $\frac{d}{dt}\vec{G} = \vec{D}$ ; ukázať že  $\vec{G} \cdot \vec{k} = \sum_i dm_i (\vec{k} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{k} \times \vec{r}) \omega = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ ; A konečný tvar  $J\dot{\omega} = -Mr^* \sin(\phi) - \vec{D}'' \cdot \vec{k}$ .

Alternatívne (do budúca toto bude vhodnejší prístup) - odvodenie vyššie uvedeného otáčania z 1. a 2. vety impulzovej + Steinerova veta.

Príklady: Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla a elektrického stroja (tu zavedieme tvar momentu síl pre motor a trenie pri otáčavom pohybe - potrebné pre manipulátory).

Kinetická energia (Rotačná a translačná časť, ich zameniteľnosť pri otáčaní okolo pevnej osi neprechádzajúcej ťažiskom), potenciálna energia vo všeobecnosti (=práca ktorú konáme, ak nezávisí od trajektórie možno zaviesť potenciálnu energiu, potenciálna energia v gravitačnom poli).

Obrázok 1: Inerciálna sústava daná konštantnými jednotkovými vektormi ( $e_1, e_2, e_3$ ) a neinerciálna sústava daná časovo-premenlivými jednotkovými vektormi ( $e'_1, e'_2, e'_3$ ) a jej polohovým, tiež od času závislým polohovým vektorom  $\mathbf{R}$ . Vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r}'$  ukazujú na ten istý bod vzhľadom na dve rôzne vzťahné sústavy.

## 2.3 Pohybové rovnice v neinerciálnych sústavách a Lagrange I.

Motivácia: Pohyb častí zrýchľujúceho sa, otáčajúceho sa stroja. Odvodenie neinerciálnych síl, rozdelenie jednotlivých členov, od hmotného bodu k ideálne tuhému telesu. Príklady: výt'ah, odstredivka, Foucaultovo kyvadlo (<http://www.calacademy.org/products/pendulum/>).

2. veta impulzová v neinerciálnej sústave (2005 neodprednášané).

V inerciálnej sústave platí 1. veta impulzová pre i.t.t

$$\frac{dM\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{r} = \sum_i r_i \mathbf{e}_i$  nech označuje polohu ťažiska. Tento vektor môžeme vyjadriť aj v neinerciálnej sústave ako

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' = \mathbf{R} + \sum_i r'_i \mathbf{e}'_i, \quad (2)$$

kde explicitne uvažujeme rozklad polohového vektora  $\mathbf{r}'$  vhl'adom na neinerciálnu súradnicovú sústavu.

Časovú deriváciu v *neinerciálnej sústave* budeme chápať ako nasledovný výraz:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \sum_i \mathbf{e}'_i \frac{dr'_i}{dt} \quad (3)$$

t.j. tak akoby sme považovali jednotkové vektory  $\mathbf{e}'_i$  za konštantné. Potom pre časovú deriváciu v neinerciálnej sústave dostaneme

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (4)$$

a pre druhú deriváciu

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \quad (5)$$

$$= \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \quad (6)$$

1. veta impulzová zapísaná v neinerciálnej sústave teda nadobúda tvar

$$M \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - M \left( 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' \right) \quad (7)$$

kde jednotlivé členy sa nazývajú aj Coriolisova sila ( $-M2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ ), odstredivá sila ( $-M\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ ) a zotrvačná sila ( $-M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$ ). Posledný člen ( $-M\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$ ) nemá zaužívaný žiaden názov.

V prípade 2. vety impulzovej volíme za neinerciálnu sústavu sústavu v ktorej je tenzor zotrvačnosti diagonálny

$$\vec{I} = \sum_i \mathbf{e}'_i I_{ii} \mathbf{e}'_i \quad (8)$$

Pohybová rovnica (v neinerciálnej sústave) potom nadobudne tvar Eulerových rovníc pre rotáciu i.t.t.

$$\frac{d\vec{I} \cdot \omega}{dt} + \omega \times (\vec{I} \cdot \omega) = D \quad (9)$$

Vzťah medzi natočením telesa (daným tzv. Eulerovými uhlami) a okamžitým vektorom uhlovej rýchlosti  $\omega$  je daný relatívne komplikovanými vzťahmi, ktorými sa ale nebudeme zaoberať hoci k rotácii tuhého zotrvačníka sa ešte vrátíme pri Lagrangeových rovniciach.

**Lagrangeove rovnice.** Variačný princíp a Lagrangeove rovnice, zovšeobecnené súradnice a rýchlosti. Diskutovať bez odvodenia, iba matematickú formu variačného princípu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt = 0 \quad (10)$$

kde  $L(q_1, q_2, \dots, q_M, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$  je Lagrangeova funkcia  $N$  zovšeobecnených súradníc  $q_i$  a k nim patria  $N$  zovšeobecnených rýchlostí  $\dot{q}_i$  a výsledný tvar Lagrange-Eulerových rovníc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

**Ukázať že otáčanie okolo pevnej osi v gravitačnom poli sa dá napísať v tvare Lagrangeovej rovnici** Pohybová rovnica, kinetická a potenciálna energia fyzikálneho kyvadla sú

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -mgr^* \sin(\phi) \quad (12)$$

$$E_K = \frac{1}{2} \omega \cdot \vec{I} \cdot \omega = \frac{1}{2} I \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (13)$$

$$E_P = -mg \cdot r = mgr^* \cos(\phi) \quad (14)$$

A z toho úvaha že

$$L(q_1, q_2, \dots, q_M, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) = E_K - E_P. \quad (15)$$

## 2.4 Lagrangeove rovnice II.

Sumarizácia Lagrangeovej funkcie, zovšeobecnených súradníc a rýchlostí a Lagrangeových rovníc.

### Lagrangeove rovnice pre hmotný bod v potenciálovom poli v 3D.

Kartézske súradnice v 3D

$$E_k = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (16)$$

$$E_p = V(\mathbf{r}) \quad (17)$$

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = E_k - E_p, \quad \nabla_{\mathbf{r}}L = -\nabla E_p = \mathbf{F}, \quad \nabla_{\mathbf{v}}L = m\mathbf{v} \quad (18)$$

$$(19)$$

čo vyústi k Lagrange-Eulerovej rovnice v tvare

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{F}, \quad (20)$$

t.j. Newtonovej rovnice.

Polárne súradnice v 2D, gravitačné pole v smere  $-\mathbf{k}$ .

$$x = r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi) \quad (21)$$

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -g \quad (22)$$

Prepis do polárnych súradníc:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} \quad (23)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos(\phi) - 2\dot{r}\sin(\phi)\dot{\phi} - r\cos(\phi)\dot{\phi}^2 - r\sin(\phi)\ddot{\phi} \quad (24)$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} \quad (25)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin(\phi) + 2\dot{r}\cos(\phi)\dot{\phi} - r\sin(\phi)\dot{\phi}^2 + r\cos(\phi)\ddot{\phi} \quad (26)$$

Násobením (24) s  $\cos(\phi)$  a (26) s  $\sin(\phi)$  a ich spočítaním a použitím Newtonových rovníc dostaneme

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mg\sin(\phi) \quad (27)$$

Naopak, násobením (24) s  $-\sin(\phi)$  a (26) s  $\cos(\phi)$  a ich spočítaním máme

$$mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} = mg\cos(\phi) \quad (28)$$

Posledné dve rovnice predstavujú pohybové rovnice bodu v polárnych súradniciach. V rámci Lagrangeovej formulácie máme

$$E_k = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \quad (29)$$

$$E_p = mgy = mgr\sin(\phi) \quad (30)$$

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr\sin(\phi) \quad (31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\phi}^2 - mg\sin(\phi) \quad (32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgr\cos(\phi) \quad (34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad (35)$$

a teda Euler-Lagrangeové rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (36)$$

získa tvar

$$m\ddot{r} - m r \dot{\phi}^2 = -mg \sin(\phi) \quad (37)$$

a podobne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (38)$$

je

$$m r^2 \ddot{\phi} + 2 m r \dot{r} \dot{\phi} = m g r \cos(\phi) \quad (39)$$

Vidíme teda že oba prístupy sú ekvivalentné (vedú na identické rovnice) a že formálny tvar Lagrange-Eulerových rovníc je rovnaký pre kartézské aj polárne súradnice. V nasledovnom si dokážeme univerzálnosť Lagrangeových rovníc.

**Nezávislosť LR od zovšeobecných súradníc** Ukážeme, že Lagrangeove rovnice sú nezávislé od zvolených súradníc. Nech v súradniciach  $\{q_i\}_{i=1}^N$  máme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (40)$$

Nech existujú iné súradnice  $\{p_j\}_{j=1}^N$  dané jedno-jednoznačným zobrazením

$$p_j = p_j(\{q_i\}) \quad (41)$$

$$\dot{p}_j = \sum_k \frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (42)$$

V nich vyjadríme Lagrangeovu funkciu

$$L(\{p_j\}, \{\dot{p}_j\}) = L\left(\{p_j(\{q_i\})\}, \left\{\sum_k \frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k} \dot{q}_k\right\}\right) \quad (= L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})) \quad (43)$$

Pre dosadenie do rovnice (40) potrebujeme poznať nasledovné derivácie

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} \left( \sum_k \frac{\partial^2 p_j}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k \right) \quad (44)$$

$$= \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} \left( \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i} \right) \quad (45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i} \quad (46)$$

Dosadením do (40) dostaneme

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (47)$$

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} - \frac{\partial L}{\partial p_j} \right) \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i} = 0 \quad (48)$$

z čoho priamo dostávame že výraz v zátvorkách musí byť nulový <sup>1</sup> t.j. Lagrangeove rovnice platia aj v nových súradniciach.

Lagrangeove rovnice pre vodorovné-posuvné kyvadlo. [ Nie podľa skrípt, ale pomocou I. a II. vety impulzovej a pomocnej sily  $\vec{T}$  ktorá garantuje uchytenie  $m_1$  na vlákne.].

Impulzové vety pre tyč na koľajničke v gravitačnom poli:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} \quad (49)$$

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} \quad (50)$$

ale naozaj nás zaujíma iba  $x(t), \phi(t)$ .

Lagrangeov formalizmus

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \quad (51)$$

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \frac{d}{dt} \mathbf{l} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{\phi} \mathbf{k} \times \mathbf{l} \quad (52)$$

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + 2\dot{x}l \cos(\phi) \dot{\phi} \quad (53)$$

$$E_p = -mgl \cos(\phi) \quad (54)$$

...

---

<sup>1</sup>matica  $\partial p_j / \partial q_i$  musí mať inverznú maticu čo je splnené pre jedno-jednoznačné transformácie súradníc.



## 2.5 Lagrangeove rovnice III.

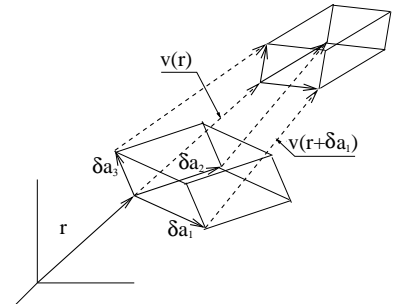
Lagrangeove rovnice pre 2-ramenný manipulátor s paralelnými osami otáčania (Odvodenie z kinetickej a potenciálnej energie dvoch tuhých telies a nie cez elementy ako v skriptách). Diskusia riešenia rovníc s poukázaním na možnú chaotickú dynamiku - kyvadlo v Yorku, diskusia pre možný tvar zovšeobecnených síl: 1) trenie, 2) stabilizovanie harmonickým potenciálom + rezonančné kmity 3) budenie prúdom a problé optimalizácie času a disipácie. Odvodenie tvaru Lagrangeovej funkcie pre 2-ramenný manipulátor s kolmými osami otáčania - pozor - potrebujeme tenzor zotrvačnosti hranola pre ľubovoľné natočenie v rovine (tento fakt nie je vzatý na vedomie v skriptách kde uvedená Lagrangeova funkcia preto nie je korektná).

Pre budúce prednášky: spomenúť kedy Lagrange prestáva byť užitočný - keď niektoré z geometrických obmedzení sa ruší v priebehu dynamiky: problém vzlietnutia padajúcej tyče.

## 2.6 Dynamika kontinua

1. Predpoklad popisu kontinua - hmotné elementy sa hýbu po dráhach a navzájom sa nepretínajú.  $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$  - Lagrangeov pohľad na vec,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  - rýchlostné vektorové pole - Eulerov pohľad. Hydrodynamická derivácia - zavedenie a pripomenutie zmyslu gradientu a parciálnych derivácií.
2. Základná veta kinematiky kontinua - najvšeobecnejší pohyb dostatočne malého elementu kontinua je paralelný prenos, otočenie a roztiahnutie (stlačenie) v 3 lineárne nezávislých smeroch [?].

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{a}_i) &\approx \vec{v}(\vec{r}) + \delta\vec{a}_i \cdot \nabla_{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) + (\vec{v}(\vec{r}) \nabla) \cdot \delta\vec{a}_i \quad (55) \\ &= \vec{v}(\vec{r}) + \vec{\omega}(\vec{r}) \times \delta\vec{a}_i + \frac{d}{dt} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{a}_i + \mathcal{O}(|\delta\vec{a}_i|^3) \end{aligned}$$



kde

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}(\vec{r})$$

predstavuje lokálnu rotáciu kontinua (evidentne všetky  $\delta\vec{a}_i$  sa natočia o uhol  $\vec{\omega}(\vec{r})dt$ ) a

$$\frac{d}{dt} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r}) = \frac{1}{2} ((\vec{v}(\vec{r}) \nabla) + \nabla \vec{v}(\vec{r}))$$

predstavuje časovú zmenu tenzora deformácia kontinua. Ak lokálne natočíme súradnicový systém tak aby  $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}$  bol diagonálny dostaneme (ak zvolíme  $\delta\vec{a}_i$  ako vlastné vektory  $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r})$ )

$$\Delta\delta a_i = \varepsilon_{ii}\delta a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

a pre relatívnu zmenu dostatočne malého objemu (s daným množstvom hmotnosti)

$$\delta V/V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}.$$

Alebo, použitím časových derivácií

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho(r)} \frac{d\rho(r)}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} = \nabla \cdot \vec{v}$$

(rovnica kontinuity)

3. Pohybová rovnica kontinua (Newtonova pohybová rovnica) -

- (a) Gaussova veta (aj pre tenzorové pole), rovnica kontinuity z pohybu ľub. objemu  $\Omega(t)$ , kde objem  $\Omega(t)$  sa hýbe s kontinuum (t.j. jeho hranice sú pevne spojené s určitými bodmi kontinua).

\*\*\*\*\* koniec prednášky \*\*\*\*\*

Fyzikálny zmysel toku

$$\vec{j} = \vec{v}\rho \quad (57)$$

$$\frac{\Delta M}{dt \Delta S} = \frac{\Delta l \Delta S}{dt} \rho = \frac{\vec{v} dt \cdot d\vec{S}}{dt \Delta S} \rho \Delta S \quad (58)$$

Spomeň prepis rovnice kontinuity pre hromadenie materiálu: Tok materiálu, zásobník, proporcionálna regulácia.

Rovnica kontinuity použitím hydrodynamickej derivácie, rovnica kontinuity a  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ .

Rovnica kontinuity (odvodenie pomocou nehybnej oblasti  $\Omega$ .) - urobiť na cvičení

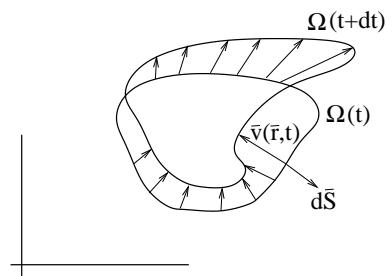
(b) Tensor napätia: dáva silu ktorou pôsobí vonkajšia sila na element plochy  $d\vec{S}$  (pripomeň orientáciu) malého objemu  $dV$ ,  $d\vec{F} = d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}$ . Tlak ako záporné napätie pre izotrópne prostredie ( $\overleftrightarrow{\sigma} = -p \mathbf{1}$ ).

(c) Samotná rovnica. Odvodenie z

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(r,t) \vec{v}(r,t) d^3r = \int_{\Omega(t)} d\vec{F}.$$

s výsledkom

$$\rho(r,t) \left( \frac{\partial \vec{v}(r,t)}{\partial t} + \vec{v}(r,t) \cdot \nabla \vec{v}(r,t) \right) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(r,t) + \vec{f}(r,t).$$



Komentár:

- tenzor napätia a tlak sú dané lokálnym stavom kontinua a preto treba termodynamiku.
- fyzikálny zmysel člena  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \frac{1}{2} v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ : hustota kin. energie a vírivosť. Tento člen zabezpečuje inherentne nelineárny charakter dynamiky kontinua - neprítomný len pre malé kmity bez prenosu látky (napr. zvuk).
- hustota hmotnosti je ďalšia neznáma funkcia - treba využiť aj rovnicu kontinuity.
- je to vlastne rovnica spojitosti pre hybnosť...

## 2.7 Prúdenie ideálnej kvapaliny

Ideálna kvapalina - bez viskozity a je nestlačiteľná, t.j.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho(\vec{r},t) = const$$

kde to posledné platí v priestore s kvapalinou.

### 2.7.1 Laminárne prúdenie

$\nabla \times \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = -\nabla\Phi$ , kde  $\Phi$  nazývame potenciálom rýchlosti a pohybová rovnica nadobudne tvar

$$\nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \vec{f}$$

Pre potenciálové polia (napr. gravitačné)

$$\frac{1}{\rho} \vec{f} = \vec{g} = -\nabla(-\vec{g} \cdot \vec{r}) = -\nabla\phi$$

a teda dostávame zovšeobecnenú (časovo závislú) Bernoulliho rovnicu

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = c(t),$$

kde  $c(t)$  je iba od času závislá (nie od priestoru) funkcia. Ak by sme vyjadrili všetko pomocou potenciálu rýchlosti dostaneme

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = c(t) \quad (59)$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad (60)$$

Druhá, t.j. *Laplaceova* rovnica má jednoznačné riešenie pre dané okrajové podmienky - tie sa určujú z Bernoulliho rovnice na hranici (napr. povrchové vlny na vodnej hladine, vid'. Obetková a kol.: Teoretická mechanika, str. 523). Dá sa riešiť problém rozbehnutia ideálnej kvapaliny v úzkej trubke pri zadanom pretlaku na jednej strane, ako funkcie času - "indukčnosť hydraulickéj trúbky" - na cvičení.

Pri stacionárnom prípade  $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$  - stredná škola....

### 2.7.2 Prúdenie stačiteľnej kvapaliny

... a teda i plynov. Podobne ako v predchádzajúcej sekcii ale keďže hustotu nemožno pokladať za konštantnú tak treba zaviesť lokálny termodynamický potenciál -  $h(T, p)$ .

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h(T, p) \quad (61)$$

Napr. pre izotermické prúdenie

$$h(S, p) = \frac{RT}{M} \ln p.$$

lebo

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{RT}{Mp}\nabla p...$$

Vo všeobecnosti sa používa tzv. rovnica polytropy

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n$$

(pre adiabatický proces  $n = 1.4$ ) s výsledkom

$$h(p) = \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} \frac{p^{1-1/n}}{1-1/n}$$

### 2.7.3 Stacionárne ale i vírivé prúdenie kvapaliny

aj keď  $\nabla \times \vec{v} = 0$ , stále platí  $\vec{v} dt \cdot \nabla \times \vec{v} = 0$ . Ak preto integrujeme pohybovú rovnicu po krivke pozdĺž prúdnic dostaneme

$$\int_{\vec{s}_0}^{\vec{s}_1} d\vec{s} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi \right) = 0, \quad (62)$$

t.j. výraz

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi$$

je konštantný na prúdnicu, aj keď od prúdnicu k prúdnicu sa môže meniť.

## 2.8 Prúdenie viskózne kvapaliny

Motivácia ku viskozite - tangenciálne sily. Definícia

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \eta (\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \vec{1}), \quad (63)$$

kde  $\eta$  sa nazýva dynamický koeficient viskozity. Do pohybovej rovnice neslačiteľnej kvapaliny vstupuje v tvare

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma} = \eta \Delta \vec{v} \quad (64)$$

z čoho dostávame Navier-Stokes-ovu rovnicu nestlačiteľnej kvapaliny

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (65)$$

kde sa používa definícia *kinematickej viskozity*,  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\gamma] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

Pre predstavu, pre vodu máme  $\gamma \approx 0.01 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ .

Teraz nasleduje riešenie toku v tentkej vodorovnej trubici...  
s výsledkom

$$v_x(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (66)$$

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{l} x + p_0 \quad (67)$$

$$u = \frac{Q}{\pi R^2 \rho} = \frac{R^2 \Delta p}{8\eta l} \quad (68)$$

Celkový tok a analógia elektrického odporu.

## 2.9 Teória podobnosti a turbulencia

Reynolds (1883-95) prepojenie teória a praxe - vzťah procesov na rôznych mierkach (podobnosť)

Identifikácia veličín podstatných pre ustálené prúdenie:

$$\overline{r, l \quad v \quad \rho \quad \gamma = \eta/\rho \quad \Delta p}$$

Pomer veličín v Navier-Stokes-ovej rovnici:

$$\frac{dv}{dt} / \gamma \Delta v \sim \frac{ud\{l, r \dots\}}{\gamma} = Re \quad (69)$$

$$1/\rho \nabla p / \frac{dv}{dt} \sim \frac{p}{\rho u^2} = \frac{\Delta p d}{\rho u^2 l} \quad (70)$$

Použitie týchto pozorovaní:

- ustálené tečenia s identickým Reynoldsovým číslom  $Re$  sú si podobné.

- tečenie v trubici dalo

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{l}{d} \lambda, \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$

- experimentálne porozovania pre turbulentné prúdenia

$$\lambda = \lambda(Re)$$

- ... t.j. centrálna je závislosť  $\lambda$  od  $Re$ . Kvalitatívna zmena v tejto závislosti - kritické Reynoldsovo číslo (500-20000) - prechod od laminárneho (stáva sa nestabilným) k turbulentnému prúdeniu.

$$\ln \lambda(Re) = \begin{cases} -\ln Re + \ln 64, & Re < Re_c \\ -\frac{1}{4} \ln Re + \ln 0.3164 & Re > Re_c \end{cases} \quad (71)$$

Poznámka: Hodnota kritického Reynoldsovo čísla,  $Re_c$ , závisí od konkrétnej geometrie problému.

Okruhy na skúšku:

1. Pohybové rovnice tuhého telesa
2. Podmienky rovnováhy tuhého telesa
3. Otáčanie tuhého telesa okolo pevnej osi - fyzikálne kyvadlo
4. Tenzor zotrvačnosti tuhého telesa a Steinerova veta
5. Kinetická a potenciálna energia tuhého telesa
6. Pohybová rovnica elektrického stroja
7. Súvislosť medzi kinetickými veličinami vyjadrenými v dvoch rôznych súradnicových sústavách.
8. Lagrangeova formulácia dynamiky bodov a tuhých telies
9. Lagrangeova formulácia dynamiky dvojramenného manipulátora
10. Lagrangeova formulácia dynamiky dvojramenného manipulátora s plecom
11. Základné pojmy mechaniky kontinua
12. Rovnica kontinuity pre hmotnosť
13. Pohybová rovnica kontinua
14. Laminárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny.
15. Bernoulliho rovnica stlačiteľnej kvapaliny v stacionárnom prípade.
16. Viskozita a prúdenie viskózne kvapaliny v úzkej trubici.
17. Teória podobnosti.

## Referencie

- [1] Š. Bárta, "Fyzika dynamických procesov" skriptá STU, 2002.