Tri užitočné identity:

1. Použitím "bac - cab"
$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \nabla\frac{1}{2}v^2 - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) \tag{161}$$
t.j. hustota kin. energie a vírivosť. Tento člen zabezpečuje inherentne nelineárny charakter dynamiky kontinua - neprítomný len pre malé kmity bez prenosu látky (napr. pružnosť a zvuk v tuhých látkach).

2. Použitím "bac - cab"
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \Delta\vec{v} \tag{162}$$

3. Definujme si symetrizovaný gradient vektorového poľa $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}$,
$$\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla = \sum_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\vec{e}_i\vec{e}_j \tag{163}$$
potom 3. identita je
$$\nabla\cdot(\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla) = \Delta\vec{v} + \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) \tag{164}$$

3.2.1 Klasifikácia kontinuí (Čomu sa rovná tenzor napätia a kedy platí Bernoulliho rovnica?)

Ideálna kvapalina (suchá voda):

1. Nestlačiteľná: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho(\vec{r},t) = const$ čo z rovnice kontinutiy, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{v})$, dá dôležitú podmienku na ľubovolné nestalčiteľné prúdenie
$$\nabla\cdot v = 0.$$
2. Bez viskozity: $\overset{\leftrightarrow}{\sigma} = -p\overset{\leftrightarrow}{1}$, p taký aby bol objem kvapaliny nemenný.
3. Bernoulliho rovnica platí.

Nestlačiteľná kvapalina (mokrá voda):

1. Nestlačiteľná: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho(\vec{r},t) = const$ a $\nabla\cdot v = 0$.
2. Viskózna: $\overset{\leftrightarrow}{\sigma} = -p\overset{\leftrightarrow}{1} + \eta\,(\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla)$, kde $(\vec{v}\nabla)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ a η je koeficient dynamickej viskozity.
   - motivácia s tokom v smere x, $F_x = S_y\sigma_{yx} \sim \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}$
   - symetrizácia, aby sa vylúčili čisté rotácie keď $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$.

   Pohybová rovnica použitím vzťahu (164) potom nadobudne tvar Navier-Stokesovej rovnice:
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} + \vec{f}$$
3. Bernoulliho rovnica platí iba ak je prúdenie *laminárne*, t.j. $\nabla\times\vec{v} = 0$

Stlačiteľný plyn (skôr ako kvapalina):

1. ak zanedbáme viskozitu, čo je pre mnoho plynov a typické podmienky v ktorých sa nachádzajú dobré priblíženie, bude $\overset{\leftrightarrow}{\sigma} = -p\overset{\leftrightarrow}{1}$

2. ideálny plyn - $p(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)T(\vec{r},t)R/M_0$, $R = k_B N_A$ mólová plynová konštanta, k_B je Boltzmanova konštanta a M_0 je hmotnosť jedného molu kontinua. Vo všeobecnosti zístavame ďalšie skalárne pole ktoré musíme počítať - teplotné pole $T(\vec{r},t)$. V nasledujúcom pri diskusii reálnych plynov, bude dynamika teplotného poľa považovaná za veľmi rýchlu (adiabatický dej) alebo naopak, vôbec nemennú (izotermický dej) a teda sa ňou nebudeme explicitne zaoberať.

3. reálny plyn - je stlačiteľný (koeficient stlačiteľnosti $\kappa = -\frac{\partial V}{\partial p}\frac{1}{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{1}{\rho}$ h) - pričom tlak je funkciou jeho hustoty, $p(\rho)$.

   Často možno túto závislosť modelovať (alebo dokonca odvodiť) v tvare rovnice *polytropy*

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n.$$

   (pre adiabatický proces $n = 1.4$)

4. Pre pohybové rovnice je dôležitý termodynamický potenciál $h(\rho,T)$

$$dh = \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow h(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$$

   (pre Bernoulliho rovnicu pre stlačiteľný plyn) Napr. pre izotermické prúdenie

$$h(T,p) = \frac{RT}{M}\ln p,$$

   pre polytropu

$$h(p) = \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0}\frac{p^{1-1/n}}{1-1/n}$$

5. Bernoulliho rovnica platí, ale miesto člena $p(\vec{r})/\rho$ musíme vziať $h(p(\vec{r}))$.

Tuhé látky (len extrémne stručne):

1. $\frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{r},t) \approx \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(\vec{r},t)$

2. Namiesto rýchlostného poľa je hľadanou veličinou tenzor deformácie $\overleftrightarrow{\varepsilon}$

$$\frac{d}{dt}\overleftrightarrow{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial v_i(\vec{r},t)}{\partial x_j}\vec{e}_i\vec{e}_j = \frac{1}{2}\left((\vec{v}(\vec{r})\nabla) + \nabla\vec{v}(\vec{r})\right)$$

3. V prípade elastických deformácii používame zovšeobecnený Hookov zákon:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \overleftrightarrow{\overleftrightarrow{\gamma}} \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \text{ t.j. } \sigma_{ij} = \sum_{klmn}\gamma_{klmn}\varepsilon_{mn}$$

3.2.2 Stacionárne prúdenie

Prúdnica: krivka majúca v kažom bode $\vec{r}$ a čase t dotykový vektor daný vektorovým polom $\vec{v}(\vec{r},t)$.

Pozdĺž prúdnice máme $\vec{v}dt \cdot \nabla \times \vec{v} = 0$. Ak najprv uvážime neslačiteľnú kvapalinu ($\rho = konst$) a integrujeme pohybovú rovnicu pozdĺž prúdnice, pričom uvážime len pôsobenie homogénneho gravitačného poľa, t.j. $\vec{f} = \vec{g} = -\nabla(-\vec{g}\cdot r) = -\nabla\phi_g$ a použime vzťah (161) na prepis člena "$\nabla\cdot\nabla\vec{v}$", dostaneme

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+\phi_g\right) = \frac{\eta}{\rho}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r}\cdot\Delta\vec{v} \tag{165}$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2(\vec{r}_1)+\frac{p(\vec{r}_1)}{\rho}+\phi_g(\vec{r}_1)\right]-\left[\frac{1}{2}v^2(\vec{r}_0)+\frac{p(\vec{r}_0)}{\rho}+\phi_g(\vec{r}_0)\right] = \frac{\eta}{\rho}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r}\cdot\Delta\vec{v} \tag{166}$$

(167)

t.j. výraz

$$\frac{1}{2}v(\vec{r})^2+\frac{p(\vec{r})}{\rho}+\phi_g(\vec{r}),$$

so zmyslom hustoty energie kontinua, je konštantný na prúdnici, ak je viskozita nulová, rsp. približne konštantný ak je viskozit malá.
Komentáre:

- pre laminárne prúdenie je táto hodnota rovnaká pre všetky prúdnice nakoľko v tomto prípade $\nabla\times\vec{v}=0$ nezávisle od krivky po ktorej integrujeme.

- pre nesltačiteľnú kvapalinu, t.j. $\nabla\cdot\vec{v}=0$, a prúdenie je laminárne, t.j. $\nabla\times\vec{v}=0$ máme podľa rovnice (162) že aj $\Delta\vec{v}=0$ a preto v takomto prípade bude platiť Bernoulliho rovnica aj pre laminárne prúdenie viskóznej kvapaliny.

- pre stlačiteľnú kvapalinu, rsp. plyn nemožno previesť hustotu pod znak gradientu, namiesto toho treba zavisť termodynamický potenciál,

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h \tag{168}$$

  čo v konečnom dôsledku vedie na Bernoulliho rovnicu v tvare

$$\frac{1}{2}v(\vec{r})^2+h(\vec{r})+\phi_g(\vec{r}) = konst.$$