2.6 Lagrangeove pohybové rovnice, Lagrangeova funkcia

- Vyjadrime virtuálne posunutie pomocou posunutia zovšeobecnených súradníc

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{64}$$

potom D'Alembertov princíp je

$$0 = \sum_{ij}\left(m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i - \vec{F}_i\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{65}$$

a keďže δq_j sú naozaj nezávislé a ľubovoľné, máme pohybové rovnice

$$0 = \sum_{i}\left(m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i - \vec{F}_i\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1,\ldots,M \tag{66}$$

- Odvodenie Lagrangeových rovníc:
  - Zovšeobecnená sila

$$Q_j = \sum_j \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

  - Kinetická energia vyskočí v prvom člene:

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} & (67)\\
&= \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} & (68)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_i \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_i \frac{1}{2}mv_i^2 & (69)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}K - \frac{\partial}{\partial q_j}K & (70)
\end{aligned}$$

  kde sme využili identitu vyplývajúcu priamo z rovnice (60)

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

  a identifikovali kinetickú energiu systému bodov

$$K = \sum_i \frac{1}{2}mv_i^2$$

  - Teda pohybové rovnice majú tvar

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}K - \frac{\partial}{\partial q_j}K = Q_j, \quad j = 1,\ldots,M \tag{71}$$

– Ak sily rozdelíme na potenciálové a nie, tak tie prvé možno písať ako

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{pot} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Uvážením, že potenciálna energia nezávisí od rýchlostí , t.j.

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Môžeme zaviesť *Lagrangeovu funkciu*

$$L(q_i, \dot{q}_i) = K - U \tag{72}$$

vyjadrené ako funkcie zovšeobecnených polôh a rýchlostí, pomocou ktorej dostávajú pohybové rovnice tvar *Lagrange-Eulerových rovníc*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n \tag{73}$$

kde Q_i^n je i-ta zložka zovšeobecnených nepotenciálových síl.

- Prvý príklad: hmotný bod v 3D pohybujúci sa v potenciálnom poli s potenciálnou energiou $U(\vec{r})$:

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} \tag{74}$$

$$L(\vec{r},\vec{v}) = K - U, \quad \nabla_{\vec{r}} L = -\nabla U = \vec{F}, \quad \nabla_{\vec{v}} L = m\vec{v} \tag{75}$$

$$\tag{76}$$

a teda Lagrange-Eulerova rovnica

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\vec{v}} L(\vec{r},\vec{v}) - \nabla_{\vec{r}} L(\vec{r},\vec{v}) = 0 \tag{77}$$

vedie k známej Newtonovej rovnici

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \tag{78}$$

- Druhý príklad: hmotný bod v gravitačnom poli viazaný na kružnicu

Lagrangeova metóda V rámci Lagrangeovej formulácie máme

$$K(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \tag{79}$$

$$U(\phi) = mgy = mgr\sin(\phi) \tag{80}$$

$$L(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr\sin(\phi) \tag{81}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgr\cos(\phi) \tag{82}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \tag{83}$$

a teda Euler-Lagrangeové rovnica

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{84}$$

nadobudne tvar

$$mr^2\ddot{\phi} = mgr\cos(\phi) \tag{85}$$

Newtonova metóda Polárne súracnice v 2D:

$$x = r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi) \tag{86}$$

Pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = f\sin(\phi), \quad m\ddot{y} = -mg + f\cos(\phi) \tag{87}$$

kde $\vec{f} = f\cos(\phi)\vec{i} + f\sin(\phi)\vec{j}$ je sila reakcie od kružnice, vždy kolmá na kružnicu. Prepis do polárnych súradníc:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} \tag{88}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos(\phi) - 2\dot{r}\sin(\phi)\dot{\phi} - r\cos(\phi)\dot{\phi}^2 - r\sin(\phi)\ddot{\phi} \tag{89}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} \tag{90}$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin(\phi) + 2\dot{r}\cos(\phi)\dot{\phi} - r\sin(\phi)\dot{\phi}^2 + r\cos(\phi)\ddot{\phi} \tag{91}$$

Dosadením posledných do (87) a násobením prvej s $\cos(\phi)$ a druhej s $\sin(\phi)$ a ich spočítaním dostaneme

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mg\sin(\phi) + f \tag{92}$$

Naopak, násobením prvej s $\sin(\phi)$ a druhej s $\cos(\phi)$ a ich odpočítaním máme

$$mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} = mg\cos(\phi) \tag{93}$$

Sila f je taká, aby sa r nemenilo s časom, t.j. garantujú $\ddot{r} = 0$ čo z rovnice (92) dá

$$f = -mr\dot{\phi}^2 + mg\sin(\phi). \tag{94}$$

ak bude takáto sila reakcie, bude podľa (92) platiť $\ddot{r} = 0$, t.j. $r(t) = a_1 t + a_2$. Vhodné počiatočné podmienky budú $r(0) = r, \dot{r}(0) = 0$ čo dá $r = const$ a z rovnice (93) končne aj rovnicu

$$mr\ddot{\phi} = mg\cos(\phi) \tag{95}$$

Posledná rovnica predstavuje pohybovú rovnicu bodu viazaného na kružnici a polomerom r, identickú s pohybovou rovnicou získanou Lagrangeovou metódou.

- Program dynamiky manipulátorov:

  1. identifikácia zovšeobecnených súradníc: uhly, vzdialenosti
  2. vyjadrenie kinetickej (translačnej a rotačnej) energie každého dielu manipulátora pomocou zavedených zovšeobecnených súradníc.
  3. prevedenie parciálnych derivácií Lagrangeovej funkcie
  4. (A) (numerická) integrácia diferenciálnych rovníc pre $q_i, \dot{q}_i$ pre danú počiatočnú podmienku.
  5. (B) pre danú trajektóriu nájsť momenty síl a sily ktoré túto trajektóriu budú realizovať.