

Laboratórna úloha č. 25

Magnetický moment cievky

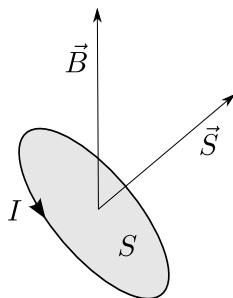
Úloha: Určiť magnetický moment cievky, ktorou prechádza prúd, pomocou merania mechanického momentu sily pôsobiaceho na cievku v homogénnom magnetickom poli.

Teoretický úvod

Na rovinnú prúdovú slučku, cez ktorú prechádza prúd I a ktorá sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou \vec{B} , pôsobí moment síl

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} \quad (1)$$

kde \vec{S} je vektor priradený ploche S ohraničenej prúdovou slučkou, kolmý na rovinu slučky podľa obr. 1. Súčin $\vec{m}_m = I\vec{S}$ sa považuje za magnetický moment prúdovej slučky, takže



Obr. 1: Rovinná prúdová slučka. Vektor \vec{S} má veľkosť S , smer kolmý na rovinu slučky a orientáciu konvenciou definovanú podľa smeru toku prúdu (pravidlom pravej ruky).

vzťah (1) sa zapisuje aj v tvare (pozri aj úvod k úlohe 24. *Magnetický moment tyčového magnetu*)

$$\vec{M} = \vec{m}_m \times \vec{B} \quad (2)$$

Treba si uvedomiť, že veľkosť magnetického momentu slučky závisí od veľkosti prúdu, ktorý ňou prechádza. Ak prúd zdvojnásobíme, zdvojnásobí sa aj magnetický moment slučky. Ak má cievka n závitov (prakticky rovnako veľkých), jej magnetický moment sa počíta pomocou rovnice

$$\vec{m}_m = nI\vec{S} \quad (3)$$

Vzťah (2) sa považuje za definičný pre magnetický moment akejkoľvek prúdovej slučky, cievky, ale aj tyčového magnetu, a bude to základný vzťah pre riešenie našej úlohy. Vzťah (3) použijeme len ako doplnkový pre účel porovnania.

Moment sily má podľa rovnice (2) veľkosť $M = m_m B \sin \beta$, kde β je uhol medzi vektormi \vec{m}_m a \vec{B} . Ak je magnetický moment \vec{m}_m kolmý na vektor magnetickej indukcie \vec{B} , t. j. $\beta = \pi/2$, potom pre veľkosť momentu sily platí vzťah

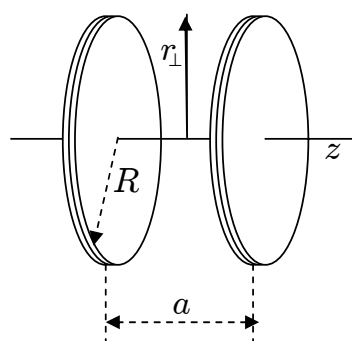
$$M = m_m B \quad (4)$$

Ak v takomto prípade poznáme veľkosť magnetickej indukcie a odmeriame moment síl pôsobiaci na slučku (cievku), môžeme určiť jej magnetický moment.

Magnetické pole Helmholtzových cievok

Homogénne pole v dostatočne veľkom priestore – postačujúcom na meranie magnetickeho momentu menšej cievky – môžeme vytvoriť pomocou Helmholtzových cievok (obr. 2).

Helmholtzove cievky pozostávajú z dvoch rovnako veľkých kruhových cievok so spoločnou osou, ktorých vzájomná vzdialenosť a sa rovná ich polomeru R . Sú zapojené do série, čiže nimi prechádza rovnako veľký a rovnako orientovaný prúd, ktorý označíme I_H . Magnetické pole medzi cievkami je osovo súmerné, takže ho môžeme vyjadriť ako funkciu dvoch súradníc – súradnice z meranej pozdĺž osi od stredu medzi cievkami a súradnice r_\perp meranej ako vzdialenosť od osi. Preto aj vektor magnetickej indukcie môžeme rozložiť na zložku \vec{B}_z rovnobežnú s osou z a na zložku \vec{B}_\perp na os kolmú. Na osi Helmholtzových cievok je vektor magnetickej indukcie \vec{B} s osou rovnobežný, má iba zložku \vec{B}_z , pričom pre hodnotu tejto zložky sa výpočtom dá získať vzťah (N je počet závitov každej z cievok):



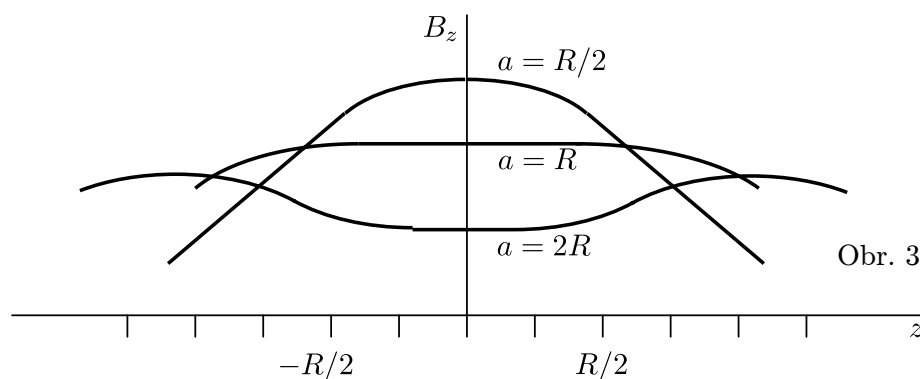
Obr. 2

$$B_z = \frac{\mu_0 I_H N}{2R} \left[\frac{1}{(1 + A_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1 + A_2^2)^{3/2}} \right] = B \quad (5)$$

kde

$$A_1 = \frac{z - \frac{a}{2}}{R}, \quad A_2 = \frac{z + \frac{a}{2}}{R} \quad (6)$$

Na nasledujúcom obrázku je schematicky znázornená závislosť veľkosti zložky B_z od sú-



Obr. 3

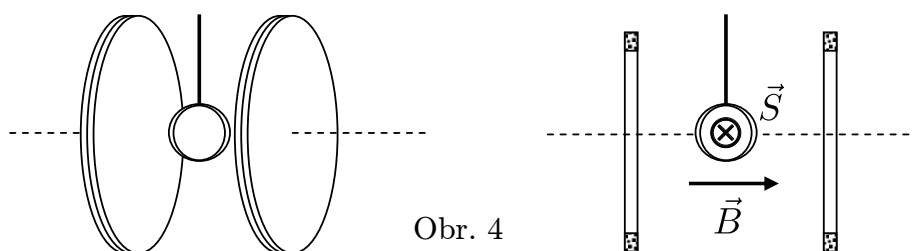
radnice z pre tri rôzne vzdialenosti cievok. Pri $a = R$ je magnetické pole v intervale $-R/2 < z < R/2$ skoro homogénne. Veľkosť magnetickej indukcie na osi v strede medzi cievkami ($z = 0$) pre $a = R$ sa vyjadří vzťahom

$$B = \frac{\mu_0 I_H N}{2R} \frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}} \quad (7)$$

ktorý budeme pri výpočtoch používať.

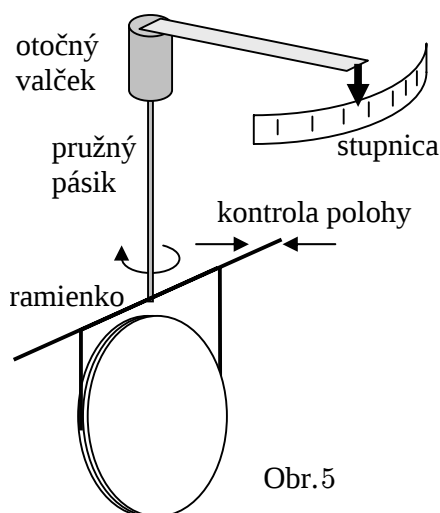
Metóda merania a opis aparatury

Dostatočne homogénne magnetické pole vytvoríme pomocou Helmholtzových cievok na základe fyzikálnych princípov popísaných v predošlom pododseku. Merať budeme magnetický moment menšej cievky kruhového tvaru s priemerom d , ktorá má n závitov. Cievka zavesená na tzv. torzných váhach je vložená do stredu Helmholtzových cievok tak (obr. 4), aby jej zodpovedajúci plošný vektor \vec{S} bol kolmý na vektor magnetickej indukcie \vec{B} poľa



Obr. 4

vytvoreného Helmholtzovými cievkami. Zo vzťahu (1) potom vyplýva, že keď cievkou necháme prechádzať prúd (označíme ho I_C), začne na ňu pôsobiť moment síl, ktorý má tendenciu otočiť ju do polohy, v ktorej by vektory \vec{B} a \vec{S} boli rovnobežné a súhlasne orientované. (Pozri aj obr. 1 a úvod k úlohe 24.) Veľkosť momentu síl sa meria torznými váhami (obr. 5), ktoré slúžia na meranie veľmi malých síl (rádovo milinewtony – mN).



Obr. 5

Ich hlavnou súčasťou je úzky pružný kovový pásik, uložený vertikálne. Horný koniec pásika je uchytený vo zvislom otočnom valčeku. Pootočení valčeka sa cez pružný pásik prenáša na ramienka, na ktorých je zavesená cievka. Ramienka súčasne slúžia na kontrolu východiskovej (nulovej) polohy, ktorá sa dá nastaviť jemným otáčaním valčeka. Po zapnutí prúdu sa cievka spolu s ramienkami vychýli o taký uhol, pri ktorom je moment sily vyvolaný magnetickým poľom kompenzovaný pružnosťou pásika. Pri výchylke o uhol β je moment sily vyvolaný magnetickým poľom rovný $M = m_m B \sin \beta$, takže na určenie magnetického momentu by bolo potrebné merať aj tento uhol. Preto valčekom otáčame, až sa cievka

dostane naspäť do východiskovej (nulovej) polohy. Ručička na torzných váhach vtedy ukazuje nenulovú výchylku, predstavujúcu pôsobiacu silu. Vtedy $\sin \beta = 1$, takže platí rovnosť momentov síl

$$m_m B = rF \quad (8)$$

Silu F odčítame zo stupnice prístroja, vynásobíme dĺžkou r ramienka, čím získame moment sily rF na pravej strane rovnice. Príslušnú hodnotu magnetickej indukcie B vytváranú prúdom I_H vypočítame pomocou vzťahu (7). Pri znalosti veľkosti indukcie magnetickeho poľa B vytvoreného Helmholtzovými cievkami môžeme potom z rovnice (8) vypočítať hľadaný magnetický moment m_m meranej cievky. Meranie vykonáme pri troch rôznych hodnotách prúdu I_C prechádzajúceho cievkou, čo znamená, že dostaneme tri rôzne hodnoty magnetickeho momentu cievky.

Vyššiu presnosť výsledku dosiahneme, keď magnetický moment budeme merať pri viacerých hodnotách indukcie magnetickeho poľa a merania nakoniec štatisticky vyhodnotíme. To znamená, že pri každej zvolenej hodnote I_C necháme cez Helmholtzove cievky prechádzať viacero hodnôt prúdu I_H (doporučame 5 rôznych hodnôt). Najjednoduchším štatistickým vyhodnotením by potom bolo spraviť priemer z takto získaných piatich hodnôt m_m . Namiesto takéhoto priamočiareho vyhodnotenia sa ukazuje ako vhodnejšie vyhodnotiť výsledky lineárnou regresiou závislosti M od B . Táto závislosť má byť podľa teoretického vzťahu (4), ktorý považujeme za našu *modelovú rovnicu*, lineárna:

$$M = m_m B \quad (9)$$

Hľadaný magnetický moment m_m je teda smernicou lineárnej funkcie $M(B)$. Smernicu (aj ďalšie parametre) nám určí lineárna regresia aplikovaná na zistený súbor hodnôt B a M . Priamka popisovaná vzťahom (9) prechádza presne cez počiatok súradnicovej sústavy, ide teda o závislosť typu $y = kx$. Preto v programe robiacom regresný výpočet nanútime priamke prechádzať počiatkom¹. Takto určené magneticke momenty m_m sú hlavnými výsledkami nášho merania a zapíšeme ich do príslušných políčok tabuliek. Štatistickú smerodajnú odchýlku s_m z lineárnej regresie neurčujte, nakoľko ju určíme iným spôsobom podľa návodu v časti Presnosť merania.

Hodnoty magnetickeho momentu m_m získané pomocou merania torzného momentu porovnáme s hodnotami získanými výpočtom pomocou vzťahu (3), čiže

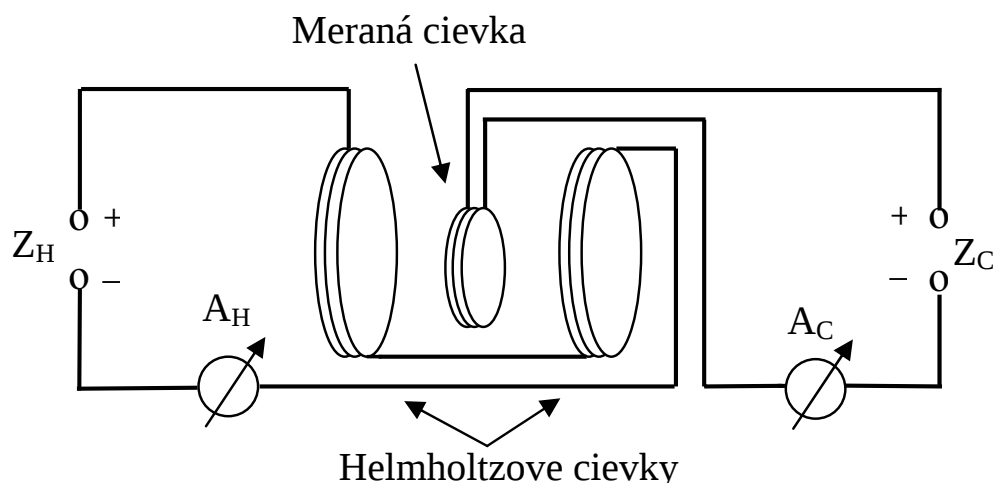
$$\tilde{m}_m = nI_C S = nI_C \frac{\pi d^2}{4} \quad (10)$$

kde sme pre odľíšenie zaviedli nad symbolom m_m vlnovku.

Pri meraniach neprekračujte tieto hodnoty prúdov:

- maximálny dovolený prúd Helmholtzovými cievkami $I_{H\max} = 5 \text{ A}$
- maximálny dovolený prúd meranou cievkou $I_{C\max} = 4 \text{ A}$

¹Napr. v programe Excel použijeme funkciu `Linest()` a jeden z jej parametrov zvolíme rovný 0. Pozri **Dodatkový dokument 2** na stránke Praktických cvičení.



Obr. 6: Schéma zapojenia.

Presnosť merania

Neistoty nameraných hodnôt magnetických momentov vyplývajú najmä z neistoty ΔI_H meraných elektrických prúdov cez Helmholtzove cievky, z neistoty ΔF odčítanej hodnoty sily, z neistoty Δr dĺžky ramienka a z nepresnosti samotného teoretického modelu, ktorý je oproti skutočnej situácii zjednodušený. Zjednodušenosť modelu spočíva najmä v tom, že roviny závitov Helmholtzových cievok nie sú presne kolmé na os týchto cievok a tiež aj v predpoklade dokonalej homogénosti magnetického poľa.

Hrubé ohodnotenie presnosti merania sa dá spraviť pomocou vzťahu

$$\left(\frac{s_m}{m_m}\right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{s_B}{B}\right)^2 \quad (11)$$

ktorý dáva do súvisu relatívne smerodajné odchýlky resp. neistoty jednotlivých veličín. s_m je odhad smerodajnej odchýlky nášho výsledku m_m a s_B je smerodajná odchýlka magnetickej indukcie vyjadrená výrazom

$$s_B = \mathcal{K} \Delta I_H \quad (12)$$

kde

$$\mathcal{K} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 N}{R} \quad (13)$$

ako to vyplýva z vyjadrenia (7). Pri výpočte s_m z rovnice (11) potrebujeme dosadiť konkrétne hodnoty m_m , F a B . Dosadíme za ne priemerné² hodnoty B a F a zodpovedajúce m_m týchto veličín (pri jednom konkrétnom I_C , ktoré použijete na vyhodnotenie presnosti). Za I_C pre ohodnotenie presnosti si zvolíme tú istú hodnotu, ktorú použijeme aj pre zostrojenie grafu.

Zo smerodajnej odchýlky s_m výsledku by sa netriviálnym postupom dala získať hodnota Δm_m neistoty výsledku. Takáto analýza by však prekročoval rámec našich cvičení. Preto

²Alternatívne by sme mohli dosadiť najmenšie hodnoty, čo by zodpovedalo ohodnoteniu presnosti metódou najhoršieho prípadu.

sa obmedzíme na najjednoduchší *odhad* neistoty tak, že ho položíme rovný smerodajnej odchýlke.

O presnosti merania nám môžu dať informáciu aj rozdiely medzi m_m a \tilde{m}_m . K týmto rozdielom je potrebné sa vyjadriť v zhrnutí výsledkov.

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 25

Magnetický moment cievky

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Parametre aparatury a ďalšie údaje potrebné k úlohe

Počet závitov v Helmholtzových cievkach	$N = 154$
Polomer Helmholtzových cievok	$R = 0,2 \text{ m}$
Priemer meranej cievky	$d = 0,12 \text{ m}$
Počet závitov meranej cievky	$n = 3$
Dĺžka ramienka	$r = 0,12 \text{ m}$
Maximálny dovolený prúd Helmholtzovými cievkami	$I_{H\max} = 5 \text{ A}$
Maximálny dovolený prúd meranou cievkou	$I_{C\max} = 4 \text{ A}$
Magnetická konštanta	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Záznam merania, výpočty a výsledky

$I_C =$					
i	1	2	3	4	5
I_H (A)					
B (mT)					
F (mN)					
M (mN . m)					
koeficient determinovanosti $\mathcal{R}_{\text{det}}^2 =$	magn. moment z $M(B)$ $m_m =$			magn. moment podľa (10) $\tilde{m}_m =$	

Upozornenie: Do tabuliek nepíšte triviálne údaje ako sú $I_H = 0$ a tomu zodpovedajúce ďalšie nulové hodnoty ($B = 0$ atď.) Toto triviálne „meranie“ je už automaticky vzaté do úvahy pri vyhodnotení výsledkov lineárnou regresiou bez konštantného člena.

$I_C =$					
i	1	2	3	4	5
I_H (A)					
B (mT)					
F (mN)					
M (mN . m)					
koeficient determinovanosti $\mathcal{R}_{\text{det}}^2 =$	magn. moment z $M(B)$ $m_m =$			magn. moment podľa (10) $\tilde{m}_m =$	

$I_C =$					
i	1	2	3	4	5
I_H (A)					
B (mT)					
F (mN)					
M (mN . m)					
koeficient determinovanosti $\mathcal{R}_{\text{det}}^2 =$	magn. moment z $M(B)$ $m_m =$		magn. moment podľa (10) $\tilde{m}_m =$		

Ukážka výpočtu \tilde{m}_m podľa (10) pre tú hodnotu I_C , ktorú použijete na zostrojenie grafu, s uvedením hodnôt a rozmerov veličín, bez zaokrúhlení:

$$\tilde{m}_m = nI_C \frac{\pi d^2}{4} =$$

Niektoré vstupné veličiny a neistoty³ potrebné pre odhad neistoty zmeraného magnetického momentu:

Prúd I_C použitý pre graf a pre ohodnotenie presnosti	$I_C =$
Sila použitá vo vzťahu (11)	$F =$
Odhad neistoty sily F	$\Delta F =$
Odhad neistoty prúdov	$\Delta I_H = \Delta I_C = \Delta I =$
Magnetická indukcia použitá vo vzťahu (11)	$B =$
Odhad neistoty dĺžky ramienka	$\Delta r =$

Výpočty smerodajných odchýlok podľa (12) a (11) s uvedením hodnôt a rozmerov veličín, bez zaokrúhlení:

$$s_B = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 N}{R} \Delta I_H =$$

³Tieto neistoty sú neistotami vstupných veličín. Nepočítajú sa, ale sa určujú z triedy presnosti prístrojov alebo sa odhadujú.

$$\left(\frac{s_m}{m_m}\right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{s_B}{B}\right)^2 =$$

Odhad neistoty magnetického momentu; najprv bez zaokrúhlenia, nakoniec zapíšte aj zaokrúhlenú hodnotu:

$$\Delta m \approx s_m = \sqrt{\left(\frac{s_m}{m_m}\right)^2} m_m =$$

Prílohy

- graf závislosti momentu sily M od magnetickej indukcie B pre aspoň jeden z prúdov I_C (podľa pokynov učiteľa), ktorý si zvolíte a vpíšete do grafu; do grafu zapíšte aj modelovú rovnicu (9) a hodnoty m_m a $\mathcal{R}_{\text{det}}^2$ z lineárnej regresie.

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Hodnotenie a podpis učiteľa: