7 OPERÁTORY POLE

Podle definice 5.4 jsou operátory jakékoliv znaky vyjadřující určitý úkon. Některé z nich jsou tak běžné, (např. znaky +, -, x, d/x) že při práci s nimi nemluvíme zvlášť o "operátorové" algebře. Komplikovanější jsou však operátory, vyjadřující v podstatě vlastnosti fyzikálních objektů, které si zasluhují pozornost i z hlediska "vzájemného" působení. Jestliže si předem odvodíme několik pravidel pro práci s nimi, podstatně tím zkrátíme odvození důležitých fyzikálních zákonů a řešení složitějších úloh. Praktický význam představují operátory pole a kvantověmechanické operátory (o druhé typu těchto operátorů pojednáme v další kapitole).

Základem většiny operátorů pole je tzv. Hamiltonův operátor, který v kartézské souřadné soustavě definuje podle věty 7.1 vztahem (7.1), dále jsou to gradient (grad), divergence (div) a rotace (rot) (definice 7.2 - 7.3). Jejich kombinací dostaneme další operátory, ze kterých je nejznámější operátor Laplaceův (definice 7.5).

7.1

Hamiltonův operátor, někdy nazývaný operátor

$$\nabla \;\equiv\; \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\rho x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\rho y} + \boldsymbol{k}\frac{\rho}{\rho z}\;. \qquad (7.1)$$

"nabla" (znak ∇), je definován výrazem

7.2

Gradient skalární funkce a (r) definujeme skalárním násobkem Hamiltonova operátoru s funkcí a

$$\begin{aligned} grad\ a \;&\equiv\; \nabla\ a \;\equiv \\ &\equiv\; \frac{\rho a}{\rho x}\boldsymbol{i} + \frac{\rho a}{\rho y}\boldsymbol{j} + \frac{\rho a}{\rho z}\boldsymbol{k}\;. \end{aligned} \qquad (7.2)$$

7.3

Divergence vektorové funkce $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ (znak div) je operátor definovaný skalárním součinem Hamiltonova operátoru a vektorové funkce $\boldsymbol{v}$

$$div\ \ \boldsymbol{v} \equiv \nabla\,.\,\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\rho x} + \frac{\partial v_y}{\rho y} + \frac{\rho}{\rho} \qquad (7.3)$$

Hamiltonův operátor sám o sobě nemá žádný smysl - nevyjadřuje řádnou fyzikální veličinu. Znaky derivací nabudou smysl až tehdy, když se operátor aplikuje na určitou skalární (např. a), nebo vektorovou funkci ($\boldsymbol{v}$). Jelikož jednotlivé derivace mohou mít povahu skalárů nebo vektorů, je nutno vyznačit, jak se má tento operátor na danou funkci použít. Jak jsme viděli v předcházejícím článku, jsou tři možnosti: skalární násobek (gradient), skalární součin (divergence) a vektorový součin (rotace) (věty 7.2-7.4). Při definici uvedených operátorů je výhodné považovat Hamiltonův operátor za vektor, jehož složky jsou $\boldsymbol{i}\rho/\rho x$, $\boldsymbol{j}\rho/\rho y$ a $\boldsymbol{k}\rho/\rho z$.

V následujícím uvedeme řadu významných pravidel pro "manipulaci" s definovanými operátory, přičemž některé jsou zřejmé bez důkazu, jiné můžeme na základě definice lehce dokázat, ostatní vyžadují složitější důkazy.

$$grad(cV) = c\,grad\,V,\;\; V = V(\boldsymbol{r}),\;\; c = konst.$$

$$grad\ r = \frac{\boldsymbol{r}}{r},\;\; r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (7.10)$$

7.4

Rotace vektorové funkce $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ (znak rot) je operátor definovaný vektorovým součinem Hamiltonova operátoru a vektorové funkce $\boldsymbol{v}$

$$rot\ \boldsymbol{v} \equiv \nabla x \boldsymbol{v} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\rho x} & \dfrac{\partial}{\rho y} & \dfrac{\partial}{\rho z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \tag{7.4}$$

7.5

Laplaceův operátor (znak Δ) je operátor definovaný výrazem

$$\Delta \equiv div\ \ grad \equiv \frac{\partial^2}{\rho x^2} + \frac{\partial^2}{\rho y^2} + \frac{\partial^2}{\rho z^2}. \tag{7.5}$$

7.6

Integrální věty:

$$\oint a d\boldsymbol{S} = \int (grad\ \ a) d\tau, \tag{7.6}$$

a) Gaussova - Ostrogradského věta:

$$\oint \boldsymbol{a}.d\boldsymbol{S} = \int (div\ \ \boldsymbol{a}) d\tau. \tag{7.7}$$

$$grad\, r = \pm \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$r = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.11}$$

přičemž znaménko závisí na tom, zdali derivujeme podle souřadnic koncového nebo počátečního bodu, kladné znaménko platí pro derivaci podle koncových souřadnic vektoru, záporné pro derivaci podle jeho počátečních souřadnic,

$$grad(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}.grad\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\,grad\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}x$$
$$x rot\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} x rot\,\boldsymbol{a}, \tag{7.12}$$

$$div\ \ c = 0, \quad c = konst., \tag{7.13}$$

$$div(c\boldsymbol{a}) = c\ div\ \boldsymbol{a}, \tag{7.14}$$

$$div\,\boldsymbol{r} = 3. \tag{7.15}$$

$$div\ (a\boldsymbol{b}) =$$
$$= a\ div\ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}.grad\ a, \tag{7.16}$$

$$div\ (\boldsymbol{a} x \boldsymbol{b}) =$$
$$= \boldsymbol{b}.rot\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}.rot\ \boldsymbol{b}. \tag{7.17}$$

$$rot\ c = 0, \tag{7.18}$$

$$rot\ (c\boldsymbol{a}) = c\ rot\ \boldsymbol{a},\ c = konst., \tag{7.19}$$

b)

$$\oint a\,\boldsymbol{dl} = \oint grad\,a\,.\,d\boldsymbol{S}, \qquad (7.8)$$

Stokesova věta:

$$\oint \boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{dl} = \oint rot\,\boldsymbol{a}\,.\,d\boldsymbol{S}. \qquad (7.9)$$

$$rot\,(a\boldsymbol{b}) = grad\,a \;x\; \boldsymbol{b} + a\;rot\;\boldsymbol{b},$$
$$a = a(\boldsymbol{r}) \qquad (7.20)$$

$$div\,rot\,\boldsymbol{a} =$$
$$= \nabla\,.\,(\nabla\,x\,\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\,.\,(\nabla\,x\,\nabla) = 0, \qquad (7.21)$$

$$rot\,grad\,a = \nabla\,x\,\nabla\,a = 0. \qquad (7.22)$$

Pomocí operátorů můžeme formulovat velmi užitečné vztahy, které umožňují vypočítat např. plošný integrál pomocí objemového integrálu přes objem ohraničen příslušnou uzavřenou plochou, nebo vypočítat křivkový integrál pomocí plošného integrálu přes plochu, obepnutou touto uzavřenou čarou. Jsou to tzv. Gaussova-Ostrogradského věta a Stokesova věta (integrální věty 7.6). Vztahy (7.7 a 7.9) platí za předpokladu, že se integruje podle souřadnice koncového bodu vektoru ***a.*** Jestliže se integruje podle souřadnice počátečního bodu vektoru ***a*** je nutno vzít integrály na pravé straně se záporným znaménkem.