6 ZÁKLADY VEKTOROVÉHO POČTU

Základní definice, sečítání a odečítání vektorů, násobení vektorů.

Počítání se skaláry nevyžaduje žádné zvláštní operace, protože - s ohledem na jejich definici - můžeme použít metody běžné algebry. V matematice byly již dávno rozpracované "algebry", které můžeme aplikovat i na veličiny vektorové a tenzorové povahy. Tato algebra se opírá o definici vektorů a tenzorů jako množinu uspořádaných dvojic, trojic, atd. Fyzikálnímu myšlení je však mnohem bližší formalizmus, který je založen na pravidlech, se kterými se blíže seznámíme v následující kapitole.

6.1 Základní definice, sečítání a odečítání vektorů

Rozdíl mezi "matematickým" a "fyzikálním" přístupem k vektoru je v tom, že pro matematika jsou primární souřadnice vektoru (v určeném pořadí) a až sekundární jeho absolutní hodnota a směr, zatímco pro fyzika jsou naopak primární absolutní hodnota vektoru a jeho směr a jeho sekundární souřadnice. Výhoda fyzikálního přístupu je v tom, že mnoho fyzikálních úvah můžeme vést na základě vhodně zavedených operací s vektory bez přihlédnutí k jejich složkám, tj. souřadnicím, čímž se celý proces značně zefektivňuje.

6.1
Vektor je veličina určená velikostí a směrem. Značíme ho písmeny s vodorovnými čárkami nebo šipkami (***a***, ***b***, ***m***, ***n***) v psaném textu a tučně tištěnými písmeny v tištěném textu. Graficky vektor znázorňujeme orientovanou úsečkou.

6.2
Absolutní hodnota vektoru je kladné číslo určující jeho hodnotu v příslušných jednotkách. Označujeme ji znaky $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$. Znaky *a, b*, atd. označujeme velikost vektoru, která může být podle povahy jevu kladná i záporná (např. v souvislosti s průmětem vektoru do vyznačeného směru).

6.3
Směr vektoru je určen tzv. jednotkovým vektorem. Je to vektor rovnoběžný s daným vektorem s absolutní hodnotou +1. Značíme ho písmeny $\boldsymbol{a}_o$, $\boldsymbol{b}_o$ a pod., častěji však písmeny ***i***, ***j***, ***k***, $\boldsymbol{\sigma}$ a pod.

6.4
Vektory považujeme za totožné, mají-li stejné absolutní hodnoty a jednotkové vektory.

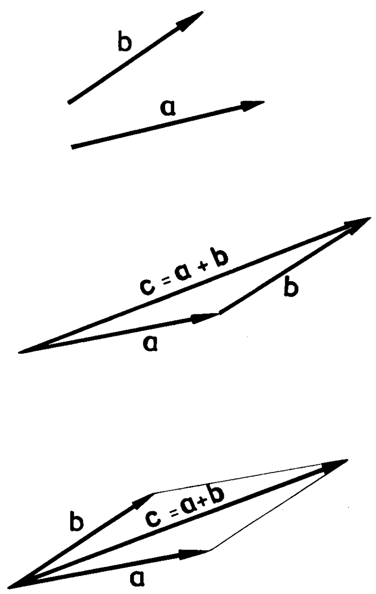
Základní konvence a definice, o které se při práci s vektory budeme opírat, poskytují věty 6.1 až 6.5. Aby pojem vektoru nebyl samoúčelný, je třeba zavést účelné operace s nimi. Je zřejmé, že při tvorbě pravidel pro výpočty s vektory můžeme zavést libovolný počet operací libovolným způsobem. Všechny budou stejně dobré, ale ne všechny se musí ukázat jako "rozumné". Rozumné, tj. užitečné jsou jen ty operace, pomocí kterých můžeme alespoň nějaký okruh jevů formulovat. Jinými slovy, mohli bychom zavést operaci součtu dvou vektorů definicí $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = a + b$. Taková definice by se mohla jevit jako logická (vzhledem k existující číselné algebře), neměla by ale žádný smysl, protože lehce zjistíme, že např. výsledek současného působení dvou sil (vektorů!) se vůbec neřídí uvedeným pravidlem (Výsledek dvou nenulových sil může být i nulový, jsou-li síly stejně velké a působí proti sobě.). Experimentální ověření výslednice dvou vektorů, které se ve svých účincích "skládají" ukázalo, že "rozumná" definice operace součtu dvou vektorů je definována větou 6.6. Podle ní součet dvou vektorů nejjednodušeji získáme graficky. Z obr. 6.1 vyplývá, že stejný výsledek dostaneme

6.5

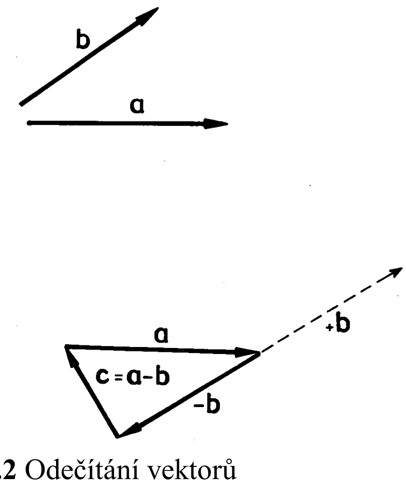
Znaménkem - před znakem vektoru ***v*** (např. -***v***) označujeme, že daný vektor má stejnou absolutní hodnotu jako vektor ***v***, avšak opačný směr.

6.6

Součet dvou vektorů ***a*** a ***b*** je vektor ***c*** = ***a*** + ***b***, který dostaneme tak, že do koncového bodu vektoru ***a*** přeneseme počáteční bod vektoru ***b*** a spojíme začátek vektoru ***a*** a konec vektoru ***b*** (obr. 6.1).



Obr. 6.1 Sčítání vektorů



Obr. 6.2 Odečítání vektorů

i sestrojením tzv. kosočtverce vektorů. Výslednice je potom daná úhlopříčkou.

Jelikož již máme definovány vektory -***a***, -***b***, lehce zavedeme operaci odečítání. Můžeme ji zavést pomocí sečítání vektorů se záporným znaménkem, např.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \ , \qquad (6.1)$$

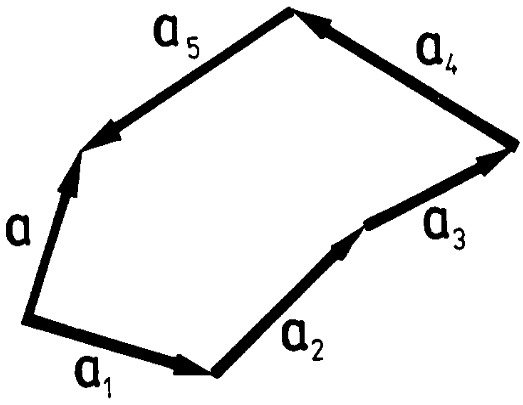
což značí, že rozdíl vektorů ***a*** - ***b*** najdeme tak, že k vektoru ***a*** připočítáme vektor -***b*** (obr. 6.2)

Opačným úkonem k skládání vektorů je jejich rozklad. Z obr. 6.3 vyplývá, že každý vektor můžeme rozložit na libovolný počet jiných vektorů. Stačí jen, jestliže začátek prvého vektoru je totožný se začátkem prvého vektoru, který máme rozložit a konec posledního vektoru že je totožný s jeho koncem. Jednotlivé "složky" však musíme na sebe navázat.

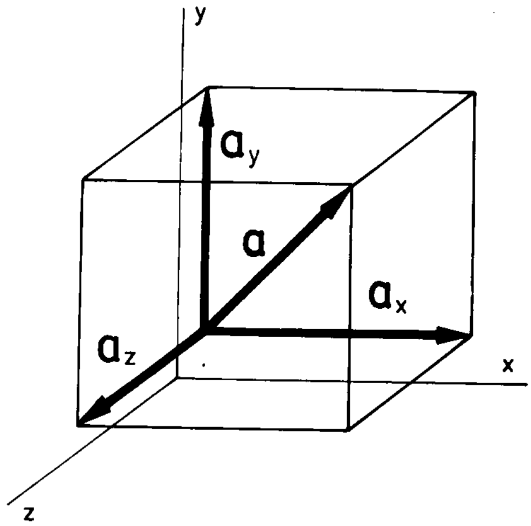
Rozklad vektoru na složky se stane jednoznačným, jestliže předepíšeme nějaké vedlejší podmínky. Nejčastěji kladenými podmínkami jsou ty, aby složky byly na sebe kolmé. S tímto typem rozkladu vektoru se setkáváme při rozkladu vektoru do směrů vyznačených kartézskými souřadnicemi x, y, z (obr. 6.4). Jestliže příslušné složky označíme $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$ můžeme psát

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z \ . \qquad (6.2)$$

Pomocí poznatků z analytické geometrie můžeme lehce najít i velikosti složek, resp. absolutní hodnoty vektorů daným součtem, resp. rozdílem jiných vektorů. V následujícím článku si však ukážeme, že všechny tyto problémy můžeme řešit i bez použití analytické geometrie pomocí vhodných operací násobení vektorů (definice 6.12).



Obr. 6.3 Rozklad vektoru ***a*** do složek $\boldsymbol{a}_i$



Obr. 6.4 Rozklad vektoru ***a*** do složek v kartézské souřadné soustavě

6.2 Násobení vektorů

V přírodě pozorujeme množství jevů, které jsou popsány veličinami vektorové povahy a jejichž výsledek má povahu jakéhosi násobení vektorů. Potíž je ale v tom, že ne všechny jevy tohoto druhu můžeme vystihnout stejným "předpisem" násobení, a proto se jeví účelným zavést několik druhů násobení vektorů (definice 6.7 až 6.9).

6.7

Násobení vektoru skalárem. Součin skaláru s a vektoru ***v*** je vektor ***c***, který je shodně rovnoběžný s vektorem ***v***, je-li s>0 a opačně orientovaný, je-li s<0. Jeho velikost je s-násobně větší, (obr. 6.5a) tj.

$$\boldsymbol{c} = s\,\boldsymbol{v}\ . \qquad (6.3)$$

6.8

Skalární součin dvou vektorů. Skalární součin vektoru ***a*** s vektorem ***b*** je skalár c s velikostí rovnající se součinu absolutních hodnot obou

$$c = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,.\,|\boldsymbol{b}|\,.\cos\,\alpha\ . \qquad (6.4)$$

vektorů a kosinu úhlu jimi sevřeného (obr. 6.5b), tj.

Zvětšení stejného vektoru budí vícenásobný účinek, např. k stejných sil vyvolá k-kráte větší účinek. V tomto případě se jeví užitečným zavést pojem skalárního násobku vektoru. (obr. 6.5a).

Dvě fyzikální veličiny, např. vektor intenzity elektrického pole ***E*** a vektor indukce elektrického pole ***D*** určují hustotu energie elektrického pole. Její velikost závisí na velikosti obou vektorů a kosinu úhlu, který oba vektory svírají. Součin vektorů, který by měl vyjádřit tento jev, musí být proto definován tak, aby jeho výsledek byl skalár s uvedenou absolutní hodnotou $m = k\,\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D} = k\,|\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{D}|\cos\alpha$ (obr.6.5b).

Jiné dvě fyzikální veličiny, např. vektor hustoty elektrického proudu ***j*** ve vodiči a magnetické indukce ***B*** podmiňují jev charakteristický vznikem síly ***F*** na tento vodič, (tj.třetího vektoru), která je kolmá na rovinu obou

6.9
Vektorový součin dvou vektorů. Vektorový součin vektoru ***a*** s vektorem ***b*** je vektor ***c*** o absolutní hodnotì rovnající se součinu absolutních hodnot obou vektorů a sinu úhlu jimi sevřeného

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \,.\, |\boldsymbol{b}| \,.\sin\,\alpha \;, \qquad (6.5)$$

mající směr kolmý na rovinu tvořenou vektorem ***a*** a ***b*** orientovaný na tu stranu, z které se ztotožnění prvého vektoru (***a***) s druhým (***b***) po kratší cestě jeví proti pohybu hodinových ručiček (směr pravotočivého šroubu) (obr. 6.5c).

6.10
Každý vektor ***v*** můžeme vyjádřit jako skalární násobek jeho velikosti a jeho jednotkového vektoru $\boldsymbol{v}_{0}$, tj.

$$\boldsymbol{v} = v \,.\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{o}} \;. \qquad (6.6)$$

6.11
Absolutní hodnotu libovolného vektoru v najdeme jako druhou odmocninu skalárního součinu vektoru ***v*** s ním samotným, tj.

$$v \;=\; (\boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{v}\;)^{\frac{1}{2}} \qquad (6.7)$$

6.12
Velikost libovolného vektoru ***v*** do směru vyznačeného jednotkovým vektorem ***σ*** je dán skalárním součinem vektoru v s tímto jednotkovým vektorem, tj.

$$v_{\sigma} = \boldsymbol{v} \,.\, \sigma \;\;. \qquad (6.8)$$

Průmět vektoru může být $\boldsymbol{v}_{\sigma} \geq \leq \;\; 0$

vektorů a má velikost rovnající se součinu velikostí obou vektorů a sinu úhlu, který svírají (obr. 6.5c).

Uvedené příklady ukazují, že je užitečné definovat tři druhy násobení tak, jak je uváděno v definicích 6.7 až 6.9.

Z uvedených základních definicí vyplývá několik velmi užitečných důsledků pro další úvahy. Uvádíme je bez důkazu, protože jejich odvození je triviální (věty 6.10 až 6.16).

Pro úplnost by bylo ještě třeba dokázat, že pro uvedené druhy násobení platí tzv. zákony distributivní a asociativní, zatímco zákon komutativní platí jen pro skalární součin (***a*** x ***b*** = ***b*** x ***a***), ale neplatí pro vektorový součin (***a*** x ***b*** = -***b*** x ***a***). Tyto důkazy však také nebudeme provádět.

Jednoduše můžeme ještě odvodit tvrzení, podle kterého každý vektor ***c***, který má začátek v bodě A (a_x, a_y, a_z) a konec v bodě B (b_x, b_y, b_z)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= c_x \boldsymbol{i} \;+\; c_x \boldsymbol{j} \;+\; c_z \boldsymbol{k} \;= \\ &= (a_x - b_x)\boldsymbol{i} \;+\; (a_y - b_y)\boldsymbol{j} \;+\; (a_z - b_z)\boldsymbol{k} \end{aligned} \qquad (6.14)$$

můžeme vyjádřit ve tvaru
a každý vektor, který začíná v počátku souřadnicové soustavy ve tvaru

$$\boldsymbol{r} \;=\; x\boldsymbol{i} \;+\; y\boldsymbol{j} \;+\; z\boldsymbol{k} \;. \qquad (6.15)$$

Pro absolutní hodnotu těchto vektorů platí

$$|\boldsymbol{c}| = (\boldsymbol{c}\,.\,\boldsymbol{c})^{\frac{1}{2}} = \left[(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (6.16)$$

a vztah

6.13
Vektor určený vektorovým součinem dvou vektorů (def. 6.9) můžeme napsat i ve tvaru

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}\,|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \sin\alpha \quad , \qquad (6.9)$$

kde jednotkový vektor $\boldsymbol{v}$ určuje směr výsledného vektoru v souladu s definicí vektorového násobení 6.9.

6.14
Skalární a vektorový součin jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, ležícímu ve směrech os x, y, a z v pravoúhlé, pravotočivé souřadné soustavě splňuje relace

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}.\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = 1 \\ \boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{i}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k} = 0 \end{aligned} \qquad (6.10)$$

a dále

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{i} x \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} x \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} x \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \\ &\boldsymbol{i} x \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} x \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} x \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} \quad . \end{aligned} \qquad (6.11)$$

6.15
Smíšený vektorový součin tří vektorů $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}$ x $\boldsymbol{c})$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu vytvořeného těmito vektory, přičemž jednotlivé vektory můžeme cyklicky
zaměňovat, tj.

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} x \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}.(\boldsymbol{c} x \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}.(\boldsymbol{a} x \boldsymbol{b}) \quad . \qquad (6.12)$$

6.16
Dvojnásobný vektorový součin $\boldsymbol{a}$ x($\boldsymbol{b}$ x $\boldsymbol{c}$) se může rozepsat podle vzorce

$$\boldsymbol{a} x (\boldsymbol{b} x \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}) \quad . \qquad (6.13)$$

$$|\boldsymbol{r}| = (\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (6.17)$$

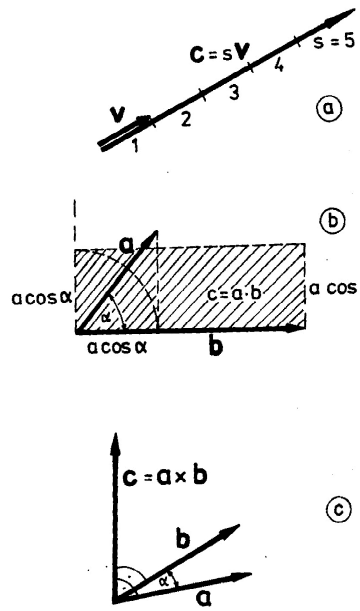
v souladu s výsledky odvozovanými v analytické geometrii.

Skalární a vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ můžeme vyjádřit i ve složkovém tvaru

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_v b_v + a_z b_z \qquad (6.18)$$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad . \qquad (6.19)$$

Při řešení složitějších úloh se může vyskytnout ještě tzv. smíšený a dvojnásobný vektorový součin. Platí pro ně pravidla 6.15 a 6.16, která v dalším často použijeme.



Obr. 6.5 Násobení vektorů
a) skalární násobek vektoru $\boldsymbol{c}$ = s $\boldsymbol{v}$
b) skalární součin dvou vektorů c = $\boldsymbol{a}$. $\boldsymbol{b}$
c) vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{c}$ = $\boldsymbol{a}$ x $\boldsymbol{b}$