

39 MECHANICKÉ VLASTNOSTI

Pevnost látek

Deformace pevných látek

Viskozita

Kohézní síly - kapilární jevy

V mechanice, probírané v části III., jsme měli na mysli jen ideální objekty: hmotný bod, dokonale tuhé těleso a ideální kapalinu. Nyní, když již víme, čím jsou způsobeny vazby v látkách a jaké struktury látky za různých okolností vytvářejí, se můžeme pokusit přezkoumat mechanické vlastnosti reálných látek a jevy s nimi související. "Reálnost" pevných látek a kapalin se projevuje zejména v jejich deformovatelnosti, viskozitě a tzv. kohézních silách. Pochopení původu uvedených vlastností umožňuje řešit problém výroby materiálů s lepšími technickými parametry, např. kovy s větší pevností apod.

39.1 Pevnost tuhých látek

Každá reálná pevná látka se vlivem vnějších sil více anebo méně deformuje. Překvapující přitom je, že pevnost reálných látek (zejména kovů) je podstatně menší (nejméně 30 000 krát), než by měla být na základě představy, že se jedná o dokonale krystalické látky s kovalentní resp. iontovou vazbou. Vysvětlení této disproporce, stejně jako vysvětlení plastičnosti a kujnosti kovů spočívá v předpokladu, že v krystalech těchto látek se (kromě různých bodových poruch) nacházejí rozsáhlejší tzv. čarové poruchy (velikosti až několik tisíc mřížkových konstant), které nazýváme dislokace (věty 39.1 až 39.3).

39.1

Dislokace jsou čarové defekty, které představují poruchu krystalické pravidelnosti podél přímky, nebo zakřivené čáry (nejčastěji spirály). Podle toho rozeznáváme hranové a spirálové dislokace.

39.2

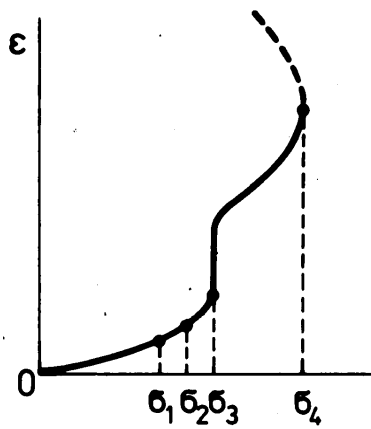
Přítomnost dislokací pod určitou kritickou hustotou (asi $10^{12} m^{-2}$) ulehčuje deformaci, přesněji tzv. skluz, nad touto koncentrací vzniká relativní zpevnění materiálu.

39.3

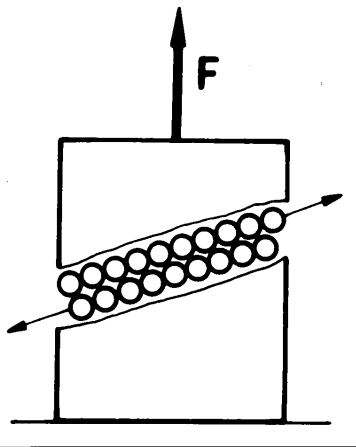
Zvětšení pevnosti materiálu můžeme docílit zamezením pohybu dislokací. Dosahuje se toho používáním polykrystalických látek, resp. příměsí malých množství atomů vhodných

Pro posouzení deformovatelnosti pevných látek zavádíme pojem napětí σ , tj. síly působící na jednotkovou plochu pevné látky a relativní prodloužení (resp. zkrácení) ϵ , určené podílem prodloužení Δl a původní délky l_0 . Nejčastěji pozorovaná závislost deformace na napětí má tvar křivky znázorněné na obr. 39.1. Tato závislost má několik charakteristických oblastí. Prvá oblast je tzv. oblast lineární závislosti, v které deformace je přímo úměrná napětí. Samotné prodloužení je malé ($\epsilon < 0.01\%$) a po ukončení působení vnější síly se materiál vrátí do původního stavu. Její hranicí je tzv. mez úměrnosti σ_1 . I při působení nepatrně větších napětí, než je mez úměrnosti, se materiál ještě deformuje pružně, i když již nelineárně, tj. po ukončení deformace se obnoví původní stav.

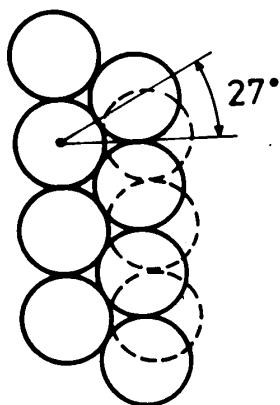
prvků.



Obr. 39.1 Závislost napětí σ na relativním prodloužení ϵ pro pevnou látku



Obr. 39.2 Posouvání atomových rovin při deformaci pevné látky

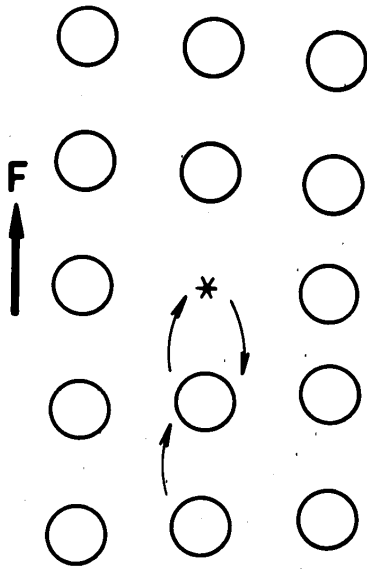


Obr. 39.3 Začátek skluzu pevné látky

Hranice této oblasti se nazývá mez pružnosti a odpovídá jí napětí σ_2 . Při dalším zvyšování napětí se dostaví zajímavý stav, ve kterém deformace samovolně pokračuje, i když napětí již neroste. Tento jev se nazývá skluz a začátek této oblasti na grafu se nazývá mez skluzu σ_3 . Po dobu skluzu se deformovaný materiál vnitřně zpevňuje a na další deformaci je potřebné zvýšit napětí. Konečně po dosažení tzv. meze pevnosti σ_4 se materiál přetrhne.

Není těžké kvalitativně vysvětlit uvedený naměřený průběh v látkách na základě jejich mikroskopických vlastností. Každá vnější síla působící na krystal má snahu posouvat vůči sobě celé atomové roviny (obr. 39.2), tj. vysunout každý jednotlivý atom z oblasti působení jednoho sousedního atomu do oblasti druhého. Prvá lineární oblast na obr. 39.1 je charakterizovaná situací, ve které se atomy chovají jako harmonické oscilátory - síla potřebná na vysunutí z jejich rovnovážných poloh je přímo úměrná výchylce, protože v okolí minima celkové potenciální energie je závislost $W_p = W_p(r)$ velmi přibližně parabolická. Při větších napětích již sice lineárnost přestává platit, ale deformace je ještě stále pružná, a to až do oblasti odpovídající situaci znázorněné na obr. 39.3. Příslušný úhel je asi 27° . Potom již není potřebné zvýšit napětí - deformace probíhá sama "skluzem" jednotlivých rovin po sobě. Tak vzniká oblast skluzu. Příslušné napětí σ_3 můžeme považovat za míru pevnosti materiálu.

Na základě výsledků, které již známe, se můžeme pokusit i o kvantitativní odhad kluzného napětí. Toto napětí je přibližně určeno silou potřebnou na uvolnění všech atomů jednotkové plochy z N_p vazeb tím, že je vysune o potřebný úsek d meziatomové vzdálenosti. Práce této síly $\sigma_3 d$ se musí rovnat vazební energii N_p atomů $N_p W_v$, takže pro kluzné



Obr. 39.4 Hranová dislokace

napětí dostaneme jednoduchý orientační vztah

$$\sigma_3 = \frac{N_p W_v}{d} \quad (39.1)$$

Jestliže dosadíme do tohoto vztahu příslušné orientační hodnoty, např. $N_p = 10^{15}$ atomů cm^{-2} , $W_v = 3$ eV a $d = 0,2$ nm, dostaneme hodnotu $\sigma_3 = 10^{10}$ Pa (přesněji výpočet dává např. pro železo hodnotu $7 \cdot 10^9$ Pa). Skutečnost je však taková, že naměřené hodnoty kluzného napětí jsou nejméně o tři řády menší. Jaký jev ovlivňuje, že materiál začíná "téci" již při takových malých napětích? Jednoznačně se ukázalo, že je to způsobeno existencí dislokací.

Dislokace jsou stručně charakterizovány definicí 39.1. Hranové dislokace si můžeme představit jako ukončenou řadu atomů uvnitř krystalu. Při pohledu ve směru osy tohoto defektu

je situace (v rovině) znázorněná na obr. 39.4. Hvězdičkou (*) je označena čára hranové dislokace. Je vidět, že při působení vnější síly se celá jedna řada atomů v blízkosti čáry dislokace může lehce posunout o jednu mřížkovou konstantu, čímž se sama dislokace přemístí v opačném směru. Jestliže takto proběhne dislokace celým průřezem krystalu, "sklouzne" celá jedna atomová rovina vůči druhé o jednu meziatomovou vzdálenost. Místo současného přerušení vazeb atomů v celé rovině stačilo v tomto případě přerušovat vazby jen v jednotlivých řadách atomů. Na vytvoření skluzu za přítomnosti dislokace stačí proto podstatně nižší napětí. Tím je způsobeno, že dislokace svým pohybem umožňuje lehkou deformovatelnost materiálu, jeho plasticitu, ale na druhé straně i značné snížení meze skluzu oproti teoreticky vypočítané hodnotě.

Jsou-li uvedené úvahy pravdivé, potom musí být možné zvýšení pevnosti kovů tím, že je připravíme bez dislokací. Takové krystaly je však možno vyrobit jen v malých objemech. Takto vypěstované krystaly však skutečně dosahují teoreticky vypočítanou pevnost (železný drát o průměru 1 mm unese až 1 000 kg).

Reálné krystaly obsahují vždy dislokace a při jejich namáhání se generují další (tzv. Frankovým-Readovým mechanismem). Jestliže však jejich hustota dosáhne hodnoty $10^{10} m^{-2}$, začínají si dislokace navzájem při pohybu krystalem "překážet", čímž se možnost lehké deformace zmenšuje. Nastává zpevnění krystalu v důsledku nadbytku dislokací. Tím můžeme přirozeně vysvětlit i oblast mezi σ_3 a σ_4 na obr. 39.1.

Poznatek, že zamezením pohybu dislokací můžeme zpevnit krystal, se prakticky využívá. V

polykrystalické struktuře je pohyblivost dislokací zjevně nižší než v krystalické, proto by takové látky měly mít větší pevnost. To se skutečně potvrdilo, avšak v praxi se nejčastěji používá jiná možnost zábrany pohybu dislokací - úmyslné zavedení malých množství vhodných prvků do krystalu. Takové atomy velmi účinně brzdí pohyb dislokací, proto např. železo s malými dávkami uhlíku, chromu, hořčíku a wolframu má podstatně větší pevnost. Současně však se zmenšuje možnost plastické deformace, takže materiály takto připravené jsou současně velmi křehké.

Pro úplnost ještě dodáme, že kromě uvedených hranových dislokací se v krystalech vyskytují tzv. spirálové dislokace, které mají pravděpodobně vážnou úlohu při růstu monokrystalů.

Nevyřešená je zatím otázka, proč i nekrystalické kovové slitiny (kovová skla) mají často téměř stejně dobré mechanické vlastnosti jako krystalické. Vzhledem k přítomnosti pořádku jen na blízkou vzdálenost můžeme o dislokacích v těchto látkách jen těžko hovořit.

39.2 Deformace pevných látek

Deformace pevných látek spočívá ve změně poloh jejich atomů a molekul následkem působení jednotlivých atomů oproti stavu bez působení vnější síly. Z praktických důvodů si však látku představujeme jako souvislé kontinuum, příslušné deformace popisujeme pomocí vhodně zavedených elastických konstant, tzv. modulů pružnosti (věty 39.5 až 39.7) a až tyto konstanty se snažíme dát do souvislosti s atomovou strukturou látky s vazbami mezi jednotlivými atomy. Vzhledem k "směrovým" vlastnostem vazeb můžeme očekávat, že krystaly se obecně deformují anizotropně (různě v různých směrech) a že proto jejich deformační vlastnosti budou popsány tenzory (tzv. tenzorem napětí).

Vzhledem ke složitosti příslušných vztahů se omezíme jen na popis deformace izotropních látek. Jsou to např. takové látky, které krystalizují v kubické struktuře a dále polykrystalické látky. Využijeme přitom známý Hookův zákon (věta 39.4).

39.4

Hookův zákon: Deformace je přímo úměrná napětí, které ji vyvolává.

39.5

V oblasti platnosti Hookova zákona platí pro relativní prodloužení ϵ a příčné napětí σ vztah

$$\sigma = E\epsilon, \quad (39.2)$$

kde E je modul pružnosti v tahu. Jednotka $[E]=Pa$. Pro zkos γ a tečné napětí τ platí vztah

$$\tau = G\gamma, \quad (39.3)$$

Z obr.39.1 vyplývá, že při deformaci pevných látek prakticky vždy existuje tzv. oblast lineární deformace, ve které je deformace přímo úměrná působícímu napětí. Tento tzv. Hookův zákon můžeme využít na odvození základních vztahů platných pro deformaci izotropních (tj. ve všech směrech stejných) prostředí.

Sílu působící na pevně uložené těleso (obr. 39.5) můžeme vždy rozložit na dvě složky: normálovou F_n a tečnou F_t . Příslušná napětí definujeme vztahy

kde G je modul pružnosti ve smyku (torzi).
Jednotka $[G]=Pa$.

39.6

Relativní příčné zkrácení η (při deformaci v tahu) je přímo úměrné relativnímu prodloužení ϵ

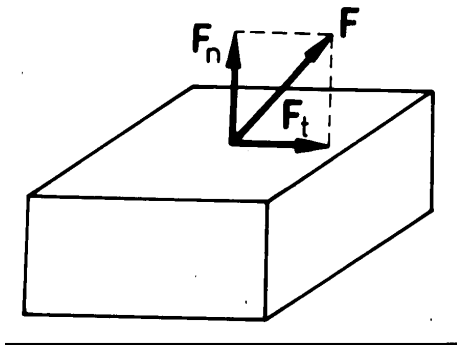
$$\epsilon = m \eta, \quad (39.4)$$

kde m je tzv. Poissonovo číslo.

39.7

Mezi třemi elastickými parametry E , G a m je vzájemná souvislost vyjádřená vztahem

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}. \quad (39.5)$$



Obr. 39.5 Rozklad deformační síly

$$\sigma = \frac{F_n}{S} \quad (39.6)$$

$$\tau = \frac{F_t}{S}.$$

Normálové složky síly (resp. normálové napětí) vyvolávají deformaci v tahu (v tlaku), tečné složky síly (resp. napětí) vyvolávají deformaci ve smyku (torzi). Pro jejich charakteristiku se zavádí relativní prodloužení (obr. 39.6a)

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l - l_o}{l_o}, \quad (39.7)$$

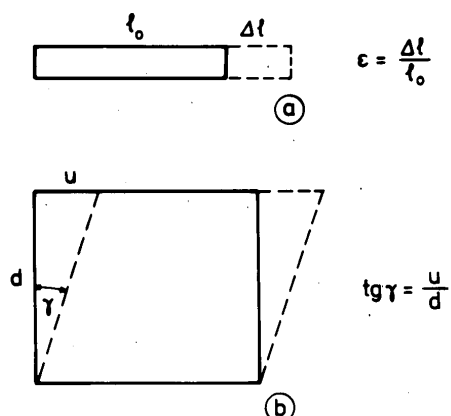
resp. zkos γ (obr. 39.6b)

$$\operatorname{tg} \gamma \doteq \gamma = \frac{u}{d}. \quad (39.8)$$

Podle Hookova zákona jsou veličiny ϵ a σ resp. γ a τ vzájemně úměrné, takže jakmile příslušné konstanty úměrnosti označíme E resp. G , dostaneme vztahy (39.2) a (39.3). Tyto parametry se nazývají modul pružnosti v tahu resp. modul pružnosti ve smyku. Rozepsáním vztahů (39.2) a (39.3) použitím definic (39.7) a (39.8) dostaneme vztahy pro výpočet nové délky tělesa namáhaného v tahu

$$l = l_o \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right), \quad (39.9)$$

resp. posunutí u horní základny oproti dolní při deformaci ve smyku



Obr. 39.6 K definici relativního prodloužení ϵ a zkosu γ

$$u = d \frac{\tau}{G}$$

(39.10)

S prodloužením resp. zkrácením tyče však souvisí příčné zkrácení, resp. rozšíření tělesa. Relativní příčné zkrácení definujeme podílem

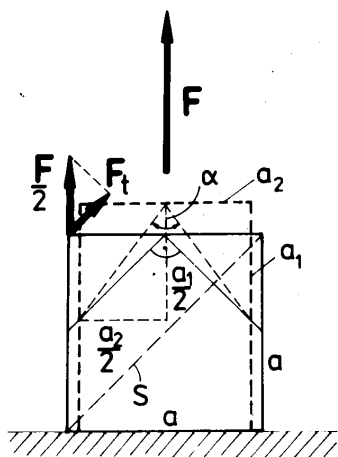
$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0}$$

(39.11)

a jelikož je úměrné relativnímu prodloužení, můžeme napsat vztah (39.4), ve kterém veličina m se nazývá Poissonův modul. Nová tloušťka tělesa deformovaného tahem je proto

$$a = a_0 (1 - \eta) = a_0 \left(1 - \frac{\sigma}{mE} \right)$$

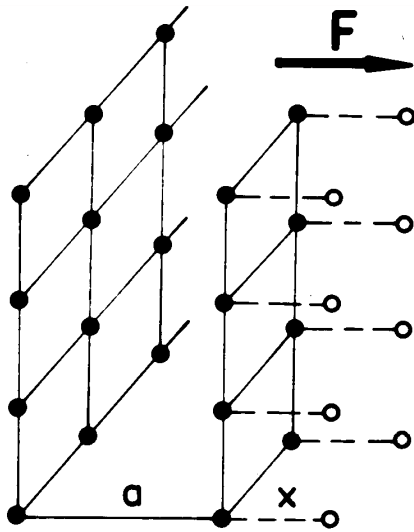
(39.12)



Obr. 39.7 K odvození vztahu mezi elastickými moduly

Z fyzikální podstaty popsaných jevů je však zřejmé, že jen dva ze zavedených elastických modulů jsou nezávislé. Třetí vyplývá z Poissonova vztahu (39.5), který je možno odvodit následujícím způsobem.

Uvažujme pro jednoduchost o deformaci krychle o hraně silou F (obr. 39.7) působící na obou protilehlých stěnách. Tím se jedna hrana prodlouží na hodnotu a_1 , druhá zkrátí na hodnotu a_2 a úhel $\pi/2$ se změní na úhel $\alpha = \pi/2 - \gamma$. Podle vztahů (39.9) a (39.12) můžeme pro ně psát vztahy



Obr. 39.8 Posuv dvou atomových rovin

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right) \\
 a_2 &= a \left(1 - \frac{\sigma}{mE} \right) \\
 \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \right] &= \frac{a_2}{a_1} = \\
 &= \frac{1 - \frac{\sigma}{mE}}{1 + \frac{\sigma}{E}} \doteq \left(1 - \frac{\sigma}{mE} \right) \left(1 - \frac{\sigma}{E} \right) \doteq \\
 &\doteq 1 - \frac{m+1}{mE} \sigma,
 \end{aligned}$$

(39.13)

přičemž jsme využili předpoklad $\sigma/E \ll 1$, což v oblasti pružné deformace je vždy splněno. Levou stranu rovnice (39.13) můžeme upravit podle známé trigonometrické poučky $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = [(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) / (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)]$, čímž dostaneme vyjádření

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \doteq (1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) (1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) \doteq 1 - 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \doteq 1 - \gamma,$$

(39.14)

kde jsme opět využili předpoklad o malé deformaci ($\operatorname{tg} \gamma/2 \doteq \gamma/2 \ll 1$). Porovnáním vztahů (39.13) a (39.14) dostaneme pro úhel γ , který představuje zkos, vztah

$$\gamma = \frac{m+1}{mE} \sigma.$$

(39.15)

Celou vzniklou deformaci si můžeme představit i tak, že na průřez o ploše $S = a(2a^2)^2/2 = \sqrt{2} a^2/2$ vyznačený na obr. 39.7 působí tečná síla $F_t = (F \cos 45^\circ)/2 = \sigma a^2 \cdot \sqrt{2}/2 \cdot 1/2$, která vyvolává tečné napětí

$$\tau = \frac{F_t}{S} = \sigma \frac{a^2 \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2}{a^2 \sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2}.$$

(39.16)

Podle vztahu (39.3) a (39.15) pak bude

$$\tau = G\gamma = G\gamma \frac{m+1}{mE}. \quad (39.17)$$

Porovnáním dvou posledních vztahů dostaneme hledaný vztah (39.5).

Zbývá nám ještě poslední otázka a to vyjasnění souvislosti elastických parametrů s mikroprocesy, které se odehrávají v látkách při jejich deformaci. Jelikož Poissonovo číslo má velmi přibližně hodnotu kolem $m \approx 3,3$ a hodnota další konstanty, např. modulu G vyplývá při známé hodnotě modulu E z rovnice (39.5), stačí najít takovou souvislost jen pro modul pružnosti v tahu. Přesný výpočet je velmi složitý, protože se zakládá na výpočtu závislosti síly potřebné na vychýlení každého atomu z rovnovážné polohy. Nám postačí jen orientační odhad založený na následující úvaze.

Uvažujme o dvojjatomové vrstvě atomů rozložených na ploše o jednotkové velikosti, vzdálených od sebe o mřížkovou konstantu (obr. 39.8). Počet atomů v jedné vrstvě je $N=1/a^2$. Síla působící na jednu z vrstev (rovnající se číselně přímo napětí σ) způsobuje relativní prodloužení našeho dvojjrstvého krystalu $\epsilon=x/a$, takže modul pružnosti v tahu je podle rovnice (39.2) určen vztahem

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \sigma \frac{a}{x}.$$

V oblasti pružné deformace je síla vychylující atom z rovnovážné polohy úměrná výchylce, tj. $F_1 = k'x$, proto celková síla (vlastně napětí σ) je určena N násobkem této síly $F_{\text{celk}} = k'xN$, takže platí

$$E = k'xN \frac{a}{x} = \frac{k'a}{a^2} = \frac{k'}{a}.$$

Největší problém je odhad konstanty k' . Můžeme k tomu využít poznatek, že potenciální energie v přímce kmitajícího atomu odpovídá střední amplitudě x_s (tj. $k'x_s^2/2$) se musí podle poznámky na konci článku 29.2 rovnat kT . Je tedy

$$k' = \frac{2kT}{x_s^2}.$$

Jestliže střední amplitudu x_s vyjádříme jako určitý násobek mřížkové konstanty a , dostaneme vztah

$$E = \frac{2kT}{\alpha^2 a^3}. \quad (39.18)$$

TABULKA

Závislost modulu pružnosti v tahu mřížkové konstantě pevné látky

látka	$d(\text{nm})$	$E(\text{N/m}^2)$
hliník	0,404	$0,73 \cdot 10^{11}$
měď	0,361	$1,29 \cdot 10^{11}$
železo	0,289	$2,16 \cdot 10^{11}$

Při pokojových teplotách je $kT \approx 0,03 \text{ eV}$ a z jiných měření je známo, že střední hodnota amplitud kmitů při této teplotě je asi 2-4% meziatomové vzdálenosti, proto pro modul pružnosti v tahu dostaneme podle vztahu (39.18) hodnotu přibližně 10^{11} Pa , což odpovídá naměřeným hodnotám (tabulka). Někdy se však postupuje i opačně - z naměřené hodnoty modulu E se usuzuje na amplitudu tepelných kmitů.

HOOKE Robert (huk), 1635-1703, anglický přírodovědec, žák R.Boylea, na svou dobu velmi všestranný vědec. Jeho zákon popisující pružné deformace, se stal základem celé teorie pružnosti a pevnosti látek. Připisuje se mu rovněž zavedení nulového bodu teplotní stupnice, určení teplot varu a tání látek, objev příčného charakteru světelných vln. Zabýval se teorií gravitace a konstrukcí různých fyzikálních měřicích přístrojů. Kromě fyziky zkoumal i některé problémy botaniky a biologie.

39.3 Viskozita

S pojmem viskozita jsme se setkali již (ve článku 38.1) v souvislosti s charakteristikou pevného a kapalného skupenství. Tato vlastnost vyjadřuje experimentálně pozorovanou skutečnost, že reálné látky - pevné i kapalné - nemění svůj tvar bez dodání energie. Jinými slovy, jednotlivé vrstvy kondenzovaných soustav se nepřesouvají po sobě bez tření. Jakmile naopak donutíme tyto látky téci, tj. posouvat jednotlivé vrstvy po sobě, vznikají mezi nimi tečná napětí vyjádřená v jednoduchém případě vztahem (38.1). Při obecném pohybu kapaliny (v pevných látkách se s tečením setkáváme jen při velmi velkých tlacích), je potřebné vyjádřit tyto síly obecně ve vektorovém tvaru, uvážit jejich vliv na pohyb kapaliny a podobně jako v případě elastických parametrů najít souvislost viskozity s vnitřní strukturou látek. Nejdůležitější poznatky z této oblasti obsahují věty 39.8 až 39.11.

39.8

Tečné napětí vznikající při pohybu reálné (ale nestlačitelné) kapaliny můžeme vyjádřit vztahem

Vnitřní tření v kapalině je způsobeno různými rychlostmi proudění jejich částí. Tečné napětí jako vektor s absolutní hodnotou mající význam určený vztahem (38.1) bude proto určen vektorovým rychlostním polem kapaliny.

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \mathbf{n} \cdot \text{grad} \mathbf{v}, \quad (39.19)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý na plošku, na kterou působí (ze strany její orientace) tečné napětí $\boldsymbol{\tau}$ a η je tzv. dynamická viskozita. Jednotka dynamické viskozity je $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$. Veličina $\nu = \eta / \rho$, kde ρ je měrná hmotnost, se nazývá kinematická viskozita, jejíž jednotkou je $[\nu] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

39.9

Navierova - Stokesova rovnice popisuje pohyb viskozni kapaliny. V případě, že jde o nestlačitelnou kapalinu, má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = & - \text{grad} V - \\ & - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (39.20)$$

kde \mathbf{v} je rychlost proudění kapaliny, V je potenciál pole, ρ měrná hmotnost, p je tlak a Δ Laplaceův operátor.

39.10

Odpor viskozni kapaliny vůči pohybu pevné kuličky poloměru r pohybující se rychlostí \mathbf{v} je

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta r \mathbf{v}, \quad (39.21)$$

39.11

Reynoldsovo číslo R je definováno vztahem

Můžeme ho proto definovat vztahem (obr. 39.9)

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \frac{d\mathbf{v}}{dr}. \quad (39.23)$$

Jestliže předpokládáme, že rychlost \mathbf{v} je funkcí jen prostorových souřadnic a ne času, můžeme použít vyjádření (článek 15.2) $d\mathbf{v} = dr \cdot \text{grad} \mathbf{v}$, takže pro tečné napětí $\boldsymbol{\tau}$ je možno psát

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \frac{dr}{dr} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = \eta \mathbf{n} \cdot \text{grad} \mathbf{v}, \quad (39.24)$$

tj. vztah (39.19), přičemž jsme označili dr/dr znakem \mathbf{n} .

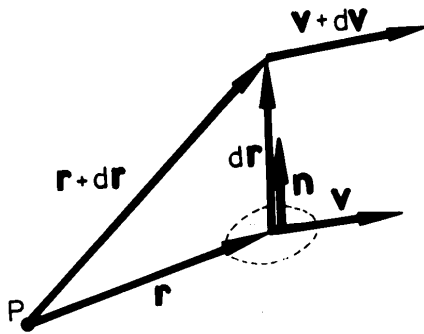
V případě nestlačitelné viskozni kapaliny je tedy tečné napětí určeno vztahem (39.19) a jeho příspěvek k celkové síle působící na libovolný objem ideální kapaliny (obr. 15.1) je

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v &= \oint \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{S} = \eta \oint \mathbf{n} dS \cdot \text{grad} \mathbf{v} = \\ &= \eta \oint \text{grad} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \eta \int \text{div}(\text{grad} \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\tau} = \\ &= \eta \int \Delta \mathbf{v} d\tau, \end{aligned} \quad (39.25)$$

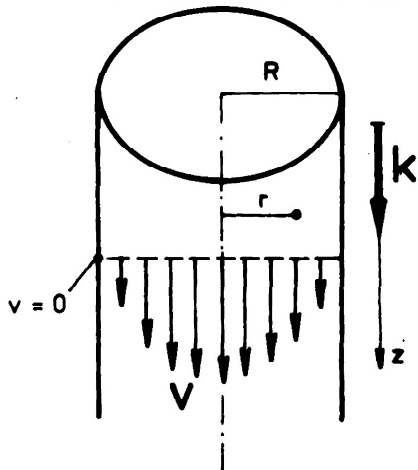
přičemž jsme použili Gaussovu - Ostrogradského větu a poznatek, že $\text{div}(\text{grad} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}$. Do pohybové rovnice (15.20), vyjadřující pohyb ideální kapaliny, nám tedy přistoupí ještě člen vyjádřený vztahem (39.25) takže dostaneme rovnici (jev zrychlení kapaliny)

$$R = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (39.22)$$

kde d je průměr potrubí s kruhovým průřezem.



Obr. 39.9 K odvození obecného vztahu pro viskozí sílu



Obr. 39.10 Proudění viskozí kapaliny v trubce

$$\mathbf{a} = -\mathbf{grad}\left(V + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}, \quad (39.26)$$

z které podobnou úpravou jako při odvození Eulerovy rovnice (článek 15.2) dostaneme rovnici (39.20), která se nazývá Navierova - Stokesova rovnice. Tuto rovnici využijeme na odvození důležitého vztahu pro rozložení rychlosti viskozí kapaliny proudící v ustáleném stavu trubkou s poloměrem R (obr. 39.10), resp. vztahu vyjadřujícího množství kapaliny, které touto trubkou za určitý čas proteče.

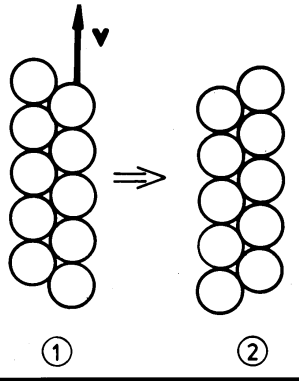
Viskozí kapalina může trubkou ustáleně proudit jen tehdy, jestliže je v ní ve směru toku přetlak přemáhající viskozí sílu. Předpokládejme, že tento přetlak je konstantní, tj. $\delta p / \delta z = -\Delta p / l$, kde l je délka trubky. V tíhovém poli je $\mathbf{grad} V = (dV/dz) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}(V_2 - V_1)/l = -g\mathbf{k}$. V případě jiných polí nechť platí $\mathbf{grad} V = (dV/dz) \mathbf{k} = C_1 \mathbf{k}$, kde C_1 je konstanta. Jestliže dále uvážíme, že jde o stacionární proudění (zrychlení $a = 0$) a že operátor Δ má ve válcové souřadné soustavě tvar

$$\Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d}{dr} \right),$$

dostaneme z rovnice (39.26) jednodušší rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\eta} \left(\rho C_1 - \frac{\Delta p}{l} \right) = C. \quad (39.27)$$

Jejím řešením dostaneme postupně rovnice



Obr. 39.11 K výpočtu viskozity

$$d\left(r \frac{dv}{dr}\right) = Cr dr$$

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} Cr^2 + A$$

$$dv = \left(\frac{1}{2} Cr + \frac{A}{r}\right) dr$$

(39.28)

a konečně řešení

$$v = \frac{1}{4} Cr^2 + A \ln r + B.$$

Konstanta $A=0$ protože v opačném případě by byla v ose trubky nekonečně velká rychlost. Konstanta B vyplývá z podmínky, že těsně při stěně trubky se kapalina nepohybuje, tj. pro $r=R$ je $v=0$, čímž dostaneme $B=-CR^2/4$, takže vztah pro rozložení rychlosti kapaliny v trubce má konečný tvar

$$v = \left(\frac{\Delta p}{1} - \rho C_1\right) \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2).$$

(39.29)

Ve svisle uložené trubce je $C_1=-g$, ve vodorovné $C_1=0$. Rychlostní profil vyjádřený touto funkcí je rovněž na obr. 39.10.

Plošným elementem $dS=2\pi r dr$ proteče za čas t objem $dV=2\pi r vt dr$ kapaliny, takže celým průřezem trubky proteče množství kapaliny vyjádřené vztahem (při $C_1=0$)

$$V = \frac{\pi}{2\eta} \frac{\Delta p}{l} \int_0^R t(R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} R^4 t,$$

(39.30)

ktej se nazývá Poiseuillův vztah. Tento vztah můžeme interpretovat i tak, že vyjadřuje množství kapaliny, které za čas t projde průřezem πR^2 průměrnou rychlostí v_p ($V=\pi R^2 v_p t$). Jestliže z příslušné rovnice vypočítáme přetlak Δp a stanovíme sílu $F=\pi R^2 \Delta p$, dostaneme vyjádření odporu F , který klade trubka ustálenému toku viskozni kapaliny

$$F = 8 \pi \eta l v_p. \quad (39.31)$$

Podobně však i viskozni kapalina klade odpor proti pohybu pevných těles v ní. Složitým výpočtem dokázal Stokes, že v případě koule je tento odpor vyjádřený vztahem (39.21).

Proudění viskozni kapaliny, i když je laminární, tj. když tzv. "tokočáry" jsou rovnoběžné s osou trubky, kterou kapalina protéká, má v sobě zárodek turbulence, protože jednotlivé částičky kapaliny se následkem viskozni sil otáčejí kolem své osy. Při zvětšení rychlosti toku se toto laminární proudění neudrží, vznikne turbulence kapaliny, při které již tokočáry nejsou přímky, ale křivky, kterým se s časem rychle a nepravidelně mění. Podle Reynoldse vznikne tento přechod tehdy, jestliže bezrozměrný parametr (39.22), který se na jeho počest nazývá Reynoldsovo číslo, je větší jak asi 2400. Kritická rychlost toku je tedy určená vztahem

$$v_k = 2400 \frac{\eta}{\rho d}. \quad (39.32)$$

V článku o pevných látkách jsme uvedli, že dynamická viskozita má pro pevné látky hodnotu kolem 10^{11} Pa s a pro kapaliny hodnotu od 10^{-3} do 10^4 Pa s. Tyto údaje můžeme podepřít hrubým odhadem na základě mikrofyzikálních procesů. Podle nich je viskozita projevem meziatomových a mezimolekulárních sil. V pevných látkách jsou to většinou silné kovalentní a iontové síly, v kapalinách jen Van der Waalovy síly. Podle definice je dynamická viskozita určena vztahem

$$\eta = \tau \frac{dv}{dy}. \quad (39.33)$$

Vypočítejte gradient rychlosti dv/dy v případě, že jedna atomová vrstva se posune po druhé o jednu meziatomovou vzdálenost za 1 s (obr. 39.11). V takovém případě je $dv/dy = \Delta v/a = (a/1s)/a = 1s^{-1}$. Veličina τ určuje tečné napětí, které musí přitom na pohybující se vrstvu působit. Podobně jako při určování meze kluzu (ve článku 39.2) i zde si představíme, že k přesunu vrstvy může dojít tehdy, jestliže napětí τ na dráze d vykoná práci, přibližně rovnou vazební energii všech atomů připadajících na jednotku plochy. Takové tečné napětí τ je pak určeno vztahem (39.1), přičemž za veličinu d musíme vzít asi polovinu mřížkové konstanty a . Práce se totiž koná jen do té doby, pokud každý atom nepřekoná asi polovinu cesty k nejbližšímu sousedovi. Potom již převládne přitažlivý účinek sousedního atomu a tečení pokračuje samovolně. Pro dynamickou viskozitu tak dostaneme přibližný vztah

$$\eta = \frac{2N_p W_v}{a}. \quad (39.34)$$

Pro pevné látky s kovalentní resp. iontovou vazbou ($W_v \in (3;7) \text{ eV}$, $N_p = 10^{19} \text{ m}^{-2}$ a $a = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) tak dostaneme hodnotu kolem 10^{11} Pa s v dobrém souhlase s experimentálně zjištěnými hodnotami. Jestliže jsou však vrstvy na sebe vázány Van der Waalsovými silami ($W_v \in (0.01; 0.1) \text{ eV}$) je dynamická viskozita asi o tři řády menší. V kapalinách jsou hodnoty dynamické viskozity ještě podstatně menší, protože tečení se realizuje posuvem kapek, ve kterých je vázaných i několik tisíc atomů (N_p ve vztahu (39.34) je proto úměrně menší) a dipólový elektrický moment kapiček může být velmi malý v důsledku jejich symetrie. Proto v kapalinách, které nemají molekuly s permanentním elektrickým momentem, nacházíme hodnoty dynamické viskozity asi $\eta \in (10^{-3}; 10^0) \text{ Pa s}$, v ostatních (viskozních) kapalinách hodnoty řádu 10^0 až 10^3 Pa s .

39.4 Kohézní síly - kapilární jevy

Ve stlačeném plynu, ve kterém se atomy a molekuly dostávají do menší vzájemné vzdálenosti, a tím víc v kapalinách, působí mezi atomy a molekulami Van der Waalsovy přitažlivé síly, které se snaží nahromdit co nejvíce částic do co nejmenšího objemu. Tyto soudržné, nebo-li kohézní síly, způsobují, že např. kapky kapaliny mají kulový tvar. Koule je totiž útvar, který má při daném povrchu největší objem a proto umožňuje uložení největšího množství částic. Molekuly na povrchu jsou přitahovány silami směřujícími do středu kapky (obr. 39.12) způsobenými kohézními silami mezi atomy v povrchové vrstvě a ve vrstvě pod ní. Tyto síly nejsou zvenku vykompenzovány tak jako přitažlivé síly uvnitř kapky, jelikož nad povrchem již nejsou další atomy. Tento reálný mikrofyzikální výklad kohézních sil a jejich působení můžeme často nahradit jednodušší fenomenologickou představou, podle které každý povrch kapaliny má vlastnosti pružné blány charakterizované určitou napjatostí (tzv. povrchovým napětím). Tato veličina je východiskem k popisu jevů souvisejících s existencí kohézních sil (věty 39.12 až 39.14).

39.12

Povrchové napětí γ je síla na jednotku délky působící v povrchové vrstvě kolmo na rozhraní. Povrchové napětí je číselně rovno i plošné hustotě povrchové energie kapaliny. Rozměr povrchového napětí je $[\gamma] = \text{Nm}^{-1}$.

39.13

Laplaceova rovnice: Rozdíl tlaků na obou stranách povrchu kapaliny se rovná součinu povrchového napětí a součtu křivosti

$$p - p_o = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

(39.35)

Tvrzení 39.12 dokážeme lehce na jednoduchém příkladu. Jestliže vytvoříme tenkou blanku kapaliny v rovině vymezené do obdélníka stočeným drátem, přičemž jedna z jeho stran se může pohybovat, musíme k zvětšení plochy

blány přemáhat sílu $F = 2l\gamma$ vyplývající ze silového působení po obou stranách blány. Práce, která se přitom na dráze Δ s vykoná $\Delta A = F\Delta$ s představuje povrchovou energii, připadající na zvětšení plochy $\Delta S = 2 l\Delta s$. Na jednotku plochy připadá tedy energie

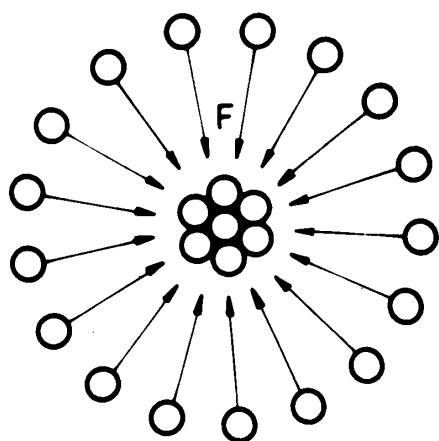
Kde R_1 a R_2 jsou poloměry křivosti dvou normálových na sebe kolmých řezů povrchu kapaliny.

39.14

Na styku tří prostředí (stěny s , kapaliny k a vzduchu v - obr. 39.13) se ustálí rovnováha, pro kterou platí

$$\cos \alpha = \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{sk}}{\gamma_{vk}}, \quad (39.36)$$

kde γ_{sv} , γ_{sk} a γ_{vk} jsou povrchová napětí působící na rozhraní vždy dvou prostředí.



obr. 39.12 Soudržné síly v kapce

$$\frac{\Delta A}{\Delta S} = \frac{2\gamma l \Delta s}{2l \Delta s} = \gamma$$

(39.37)

čímž je druhá část tvrzení 39.12 dokázána.

Toto vyjádření nám umožní i odhad velikosti povrchového napětí látek na základě mikrofyzikálních představ. Hustota povrchové energie je totiž určena vazební energií všech atomů (molekul) přítomných na jednotce plochy. Při mřížkové konstantě a je počet takových atomů $1/a^2$, takže jestliže každý z nich má vazební energii W_v , musí být povrchové napětí vyjádřené vztahem

$$\gamma = \frac{W_v}{a^2}. \quad (39.38)$$

V případě kapalin se vazby atomů (molekul) uskutečňuje prakticky vždy Van der Waalsovými silami, kterým odpovídá $W_v \in (0,01; 0,1) \text{ eV}$. Ze vztahu (39.38) dostáváme tak hodnoty $\gamma \in (0,016; 0,16) \text{ N m}^{-1}$, v dobré shodě s hodnotami uvedenými v tabulce pro několik kapalin.

Z představy, že povrch kapaliny se chová tak, jako by byl pokryt pružnou blánou, která stahuje kapalinu na nejmenší objem, vyplývá, že v ustáleném stavu musí být tyto síly vykompenzovány jinými silami. Např. v případě vyfouknuté kulové bubliny velmi malé tloušťky poloměru R (obr. 39.14) se kohézní síly vykompenzují přetlakem $p-p_0$ rovnajícím se rozdílu uvnitř a v prostoru obklopujícím bublinu.

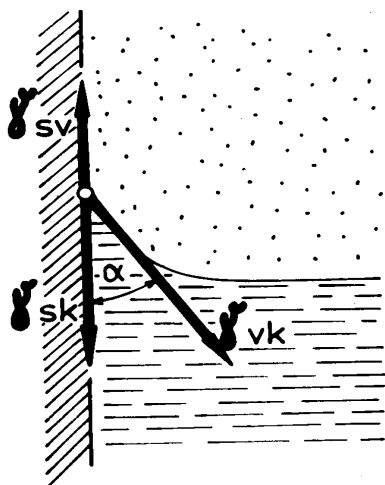
Velikost tohoto přetlaku dostaneme nejrychleji pomocí energetických úvah. Práce síly $F=(p-p_0)S$ na dráze ds , kde S je průřez pístu (obr. 39.14) se přemění na povrchovou energii připadající na přírůstek plochy obou povrchů blány $dS=8\pi R^2 dR$. Platí tedy rovnice

$$dA = (p - p_0)S ds = (p - p_0)dV = 2\gamma dS,$$

z které vyplývá

$$p - p_0 = 2\gamma \frac{dS}{dV} = 2\gamma \frac{8\pi R dR}{4\pi R^2 dR} = 4 \frac{\gamma}{R}.$$

(39.39)



obr.39.13 Povrchová napětí na rozhraní tří prostředí

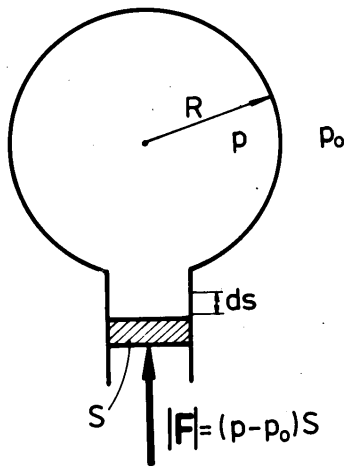
Tento výsledek můžeme interpretovat i tak, že rozdíl tlaků pod povrchem bubliny (v kapalině) a nad povrchem bubliny je $p'-p_0=2\gamma/R$ a rozdíl tlaků pod vnitřním povrchem bubliny a nad tímto povrchem (v kapalině) je $p-p'=2\gamma/R$, takže celkový rozdíl tlaků je $p-p_0=4\gamma/R$ v soulase se vztahem (39.39). Můžeme proto tvrdit, že po obou stranách kulového povrchu kapaliny je v rovnováze rozdíl tlaků

$$p - p' = 2 \frac{\gamma}{R}.$$

(39.40)

Zobecněním tohoto vztahu na případ povrchů s libovolným zakřivením představuje vztah (39.35), který se nazývá Laplaceova rovnice.

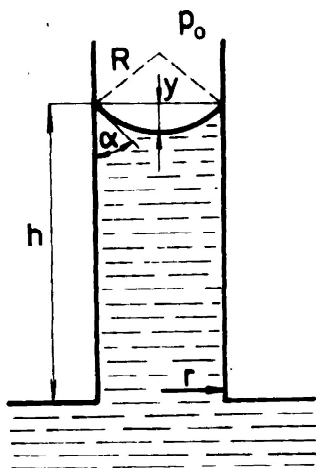
Jiným projevem kohézních sil jsou jevy na rozhraní pevných látek a kapalin. Obecně se těchto jevů zúčastňují tři prostředí (např. ještě vzduch) (obr. 39.13). V takovém případě musíme uvažovat, že na rozhraní stýkajících se prostředí působí tři síly, z nichž každá je úměrná rozdílu dvou příslušných povrchových napětí.



Obr. 39.14 Rovnováha sil v bublině

Na jednotku délky při stěně tedy působí jednak povrchové napětí mezi stěnou a vzduchem $\gamma_{sv} = \gamma_s - \gamma_v$, mezi stěnou a kapalinou napětí γ_{sk} a mezi vzduchem a kapalinou napětí γ_{vk} . Než vznikne ustálený stav, ve kterém se součet všech sil rovná nule, dojde obecně k posunu kapaliny podél stěny, proto napětí γ_{vk} působí v konečném stavu ve směru odchýleném od stěny o úhel α . V rovnováze je proto splněna rovnice

$$\gamma_{sv} - \gamma_{sk} - \gamma_{vk} \cos \alpha = 0, \quad (39.41)$$



Obr. 39.15 Kapilární elevace

z které dostaneme vztah (39.36). Z něho vyplývá, že pro $\gamma_{sv} > \gamma_{sk}$ je úhel α ostrý (kapalina smáčí

stěnu nádoby a v její blízkosti se posune podél stěny nad hladinu), pro $\gamma_{sv} < \gamma_{sk}$ je úhel α tupý (kapalina nesmáčí stěnu nádoby a v blízkosti stěny se kapalina posune pod hladinu). Je-li však $\gamma_{sv} - \gamma_{sk} > \gamma_{vk}$ nemá rovnice (39.41) řešení v oboru reálných úhlů, což značí, že rovnovážný stav se nikdy nevytvoří. Taková situace vzniká např. při styku vody a stěny (omítky betonu) - voda smáčí stěnu až po její vrch. Tímto jevem vysvětlujeme procesy navlhání látek.

Uvedené jevy jsou zvláště výrazné v tenkých trubkách, tzv. kapilárách. Souhrnně je potom nazýváme kapilární jevy. Projevují se tak, že v nich kapalina může zřetelně vystoupit nad hladinu, resp. sestoupit pod hladinu (obr. 39.15), přičemž navíc je hladina v kapilárách zakřivená. Výšku kapaliny h v kapiláře můžeme určit např. pomocí Laplaceovy rovnice napsané ve tvaru (39.40). Jestliže tlak nad kapalinou označíme p_0 , můžeme pod povrchem kapaliny v kapiláře vyjádřit vztahem $p' = p_0 - \rho gh$, takže platí rovnice

$$p - p' = p_o - (p_o \cdot \rho gh) = \rho gh = 2 \frac{\gamma}{R}.$$

Poloměr zakřivení můžeme určit z rovnice

$$R^2 = r^2 + (R - y)^2,$$

takže je

Tento vztah se často používá k měření povrchového napětí. Je-li úhel α velmi malý, může se ještě zjednodušit uvážením $r \doteq y$.

KUČERA Bohumil, 1874-1921, první český radiolog. Zpočátku se zabýval výzkumem vlastností látek

$$R = \frac{r^2 + y^2}{2y}$$

a

$$h = \frac{4\gamma y}{\rho g(r^2 + y^2)}.$$

(39.42)

při nízkých teplotách, později zejména jevem elektrokapilarity a studiem radioaktivního záření. V těchto obou oblastech fyziky dosáhl na svou dobu pozoruhodných výsledků. Na jeho podnět se J. Heyrovský začal zabývat využitím elektrokapilarity ve fyzikální chemii, což ho přivedlo až k vypracování velmi úspěšné polarografické metody a r. 1959 k Nobelově ceně za chemii. Experimentální práce B. Kučery o rozptylu záření na kovových fóliích rovněž přispěly k potvrzení Rutherfordova planetárního modelu atomu. B. Kučera byl i velmi schopným a oblíbeným pedagogem.

TABULKA

povrchové napětí kapalin při 18°C

Kapalina	Povrchové napětí $\gamma(\text{N m}^{-1})$
Éter	0,017
Alkohol	0,022
Petrolej	0,026
Benzén	0,029
Olivový olej	0,033
Glycerin	0,066
Voda	0,073
Rtuť	0,500