ČÁST VII - K V A N T O V Á   F Y Z I K A

Koncem 19. století, kdy se prakticky ukončil rozvoj mechaniky a objevila se neobyčejně dokonalá Maxwellova teorie elektrických, magnetických a optických jevů, se začali fyzici domnívat, že již znají všechny základní vlastnosti látek i polí. Avšak přesně na rozhraní 19. století se ukázalo, že to zdaleka není pravda. Okolní svět je ve svých vlastnostech nevyčerpatelný a tou novou vlastností, která v roce 1900 dala o sobě velmi naléhavě vědět, byla tzv. kvantovost. Jednoduše řečeno, šlo o poznatek, že některé fyzikální veličiny nemohou nabývat libovolné hodnoty.

Je možno namítnout, že taková vlastnost nebyla neznámá ani klasické, předkvantové fyzice, např. struna upevněná ve dvou bodech může kmitat jen s určitými přesně vymezenými kmitočty. Taková "kvantovost" měla však svoji zjevnou příčinu určenou vnějšími podmínkami - v bodech upevnění musí být vždy uzly - ale kvantovost, která se nejdříve objevila v energii elektromagnetického pole, neměla - aspoň se tak zdálo - žádnou rozumnou příčinu. Později se ukázalo, že je potřebné kvantovat nejen energii, ale i hybnost, moment hybnosti, poloměry oběžných drah elektronů, orientaci drah v prostoru, ba dokonce se začalo hovořit o kvantování prostoru a času. Připočítáme-li k tomu nám již známou kvantovost hmotností (existují jen částice se zcela určitou klidovou hmotností), kvantovost elektrického náboje (existuje elementární množství náboje $e=1{,}6.10^{-19}C$) a magnetického momentu, přijdeme k závěru, že kvantovost je jednou z nejobecnějších vlastností našeho světa. Zřetelně se však projevuje jen v mikrosvětě a tím se současně vysvětluje, proč se relativně dost pozdě tato vlastnost projevila.

Fyzika, která má adekvátně odrážet vlastnosti světa, musí mít proto tuto vlastnost organicky zabudovanou do svých teorií. Taková fyzika se nazývá kvantová fyzika a současnou fyziku si bez kvantové fyziky již nemůžeme ani představit.

29 ČÁSTICOVÉ VLASTNOSTI ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN

Fotony
Záření absolutně černého tělesa

Prvým a současně jedním z nejvážnějších projevů kvantové povahy mikrosvěta byly objeveny diskrétní energetické struktury elektromagnetického vlnění. Podnětem k tomu byl roku 1900 Planckem vyslovený postulát o existenci nejmenšího množství energie každého elektromagnetického záření a přiřazení hybnosti tomuto kvantu Einsteinem. Tak se dostal do fyziky nový objekt, který se sice vázal na elektromagnetické pole, ale měl všechny vlastnosti částic látky: energii, hybnost a - jak uvidíme - i hmotnost. Dostal název foton.

29.1 Fotony

Foton je základním elementem elektromagnetického pole a zařazujeme ho proto mezi tzv. elementární částice, tj. základní částice, z kterých sestává náš svět. Vlastnosti fotonu určují věty 29.1 a 29.2. Jedním z důkazů jeho existence je fotoelektrický jev (věta 29.3).

29.1
Energie fotonu je určena vztahem

$$W = h\nu = \hbar\omega, \qquad (29.1)$$

kde h je Planckova konstanta h=6,6256.10^{-34} Js, $\hbar = h/2\pi$, ν je kmitočet záření a ω je úhlový kmitočet.

29.2
Hybnost fotonu je určena vztahem

$$p = mc = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c}, \qquad (29.2)$$

resp. ve vektorovém tvaru vztahem

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}, \qquad (29.3)$$

kde k je vlnový vektor (věta 24.1).

Postulát 29.1 zavedl do fyziky M.Planck r. 1900 v souvislosti se zkoumáním záření, které vysílá tzv. absolutně černé těleso. Je to těleso, které dokonale absorbuje všechno na něj dopadající záření. V důsledku příjmu této energie vzrůstá jeho teplota a zvyšuje se intenzita vyzařované energie. V ustáleném stavu se pak množství absorbované energie rovná množství za stejný čas vyzářené energie, kterou můžeme vhodnými detektory měřit nejen co do celkové intenzity, ale i co do spektrálního složení.

Podle Maxwellovy teorie bylo možno uvedenou absorpci s následující emisí vysvětlit působením elektromagnetického pole na elektrony - oscilátory přítomné v látce. Podle věty 24.18 stačilo vypočítat hustotu energie připadající na tyto oscilátory, protože její součin s rychlostí šíření světla poskytuje přímo intenzitu vyzařovaného záření. Všechny pokusy o výklad spektrálního složení energie vyzařované absolutně černým tělesem založené na tomto postupu však selhaly při interpretaci skutečně naměřených průběhů (obr. 29.1). Až když M.Planck - ve skutečnosti bez zjevné logické příčiny - provedl výpočet na základě postulátu, že energie elektromagnetického pole je

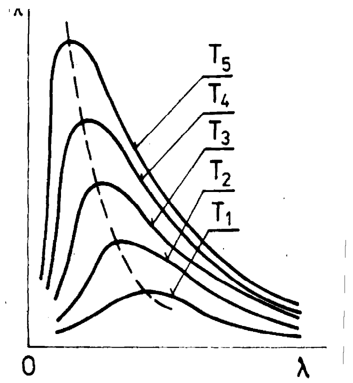
29.3
Základní rovnice pro fotoelektrický jev (Einsteinova rovnice)

$$h\nu = A + \frac{1}{2} m v^2, \tag{29.4}$$

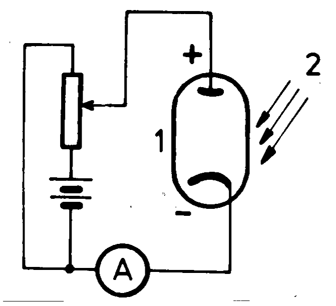
kde A je tzv. výstupní práce materiálu, W_k=1/2 mv^2 je kinetická energie elektronů.

29.4
Změna vlnové délky fotonu při Comptonově rozptylu je

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - \cos\alpha). \tag{29.5}$$



Obr. 29.1 Spektrální rozložení vyzařování černého tělesa pro různé teploty, $T_1<T_2<T_3<T_4<T_5$

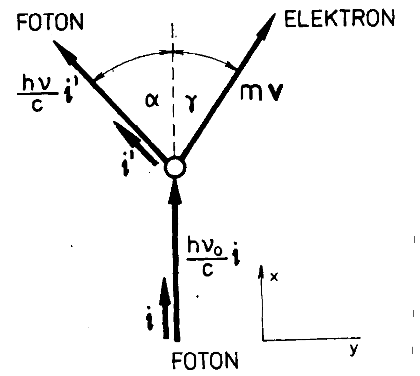


Obr. 29.2 Schéma obvodu pro měření vnějšího fotoelektrického jevu: 1-vakuová fotonka, 2-dopadající světlo

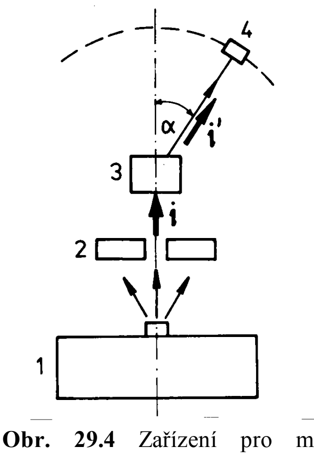
předávána v kvantech určených rovnicí (29.1), dosáhl dokonalého souhlasu s naměřenými křivkami. Vzhledem k dalekosáhlému významu tohoto postulátu se budeme problémem záření absolutně černého tělesa zabývat v samostatném článku.

Fotonovou strukturu elektromagnetického záření velmi přesvědčivě dokazuje i řada dalších, lidskému chápání podstatně bližších jevů, napø. Comptonův jev a řada interakcí fotonů s atomovým jádrem.

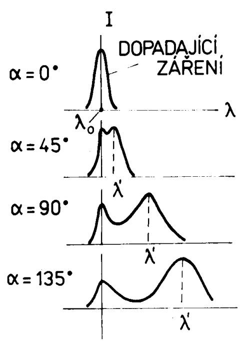
Kdyby elektromagnetické záření nemělo fotonovou strukturu, měly by všechny druhy tohoto záření (obr. 25.1) při stejné intenzitě v podstatě stejný účinek na živý organismus - měnily by jeho teplotu a pokud by se nejednalo o extrémně velké množství energie, nemělo by žádné záření zdraví škodlivé následky. Ve skutečnosti je známo, že rentgenové záření a gama záření je vždy zdraví škodlivé, i když organismus absorbuje jen nepatrné množství energie, zatímco např. vlny s vlnovou délkou odpovídající rozhlasovým vlnám a tepelnému záření nezanechávají trvalé následky na zdraví, i když organismus přijme relativně velké energetické dávky. Z hlediska fotonové představy je vysvětlení jednoduché. Buňky živého organismu disponují energií od jednotek do několika desítek *eV*. Jelikož buňka může absorbovat jen celý foton, nebo ho vůbec neabsorbovat, při ozáření vlnami, které se skládají z fotonů z energií podstatně menší než 1*eV* (rozhlasové vlny až tepelné záření) nastává téměř rovnoměrná distribuce dopadající energie na všechny buňky organismu aniž by se podstatně změnila jejich původní energie. Fotony světla (kromě toho, že působí na buňky sítnice a vyvolávají světelné vjemy) již dosti výrazně mění energii absorbujících buněk a fotony ultrafialového záření ji mění dokonce tak, že porušují chemické vazby v buňkách, a tím znemožňují jejich funkci. Zde se již projevuje koncentrace dopadající energie



Obr. 29.3 K odvození Comptonova rozptylu



Obr. 29.4 Zařízení pro měření Comptonova rozptylu 1-zdroj fotonů, 2-clona, 3-pevné látka, ve které dochází k rozptylu, 4-detektor fotonů



Obr. 29.5 Rozložení intenzity rozptýleného záření při různých rozptylových úhlech

jen na určité buňky a tato tendence se zesiluje při přechodu k rentgenovému a gama záření. Jen relativně malý počet buněk musí absorbovat dopadající energii, přičemž "postižené" nejsou jen buňky na povrchu, ale i uvnitř látky - tím hlouběji, čím větší energii mají fotony. Každá absorpce takové relativně velké energie jednou buňkou má za následek porušení její životní funkce, proto také záření je vždy zdraví škodlivé.

Velmi přesvědčivým důkazem fotonové struktury elektromagnetického záření je tzv. fotoelektrický jev. Je to jev, při kterém se při ozáření vhodných látek (kovů) světlem vhodné vlnové délky uvolňují z jejich povrchu elektrony. Schéma uspořádání experimentu je na obr. 29.2. Charakteristické uspořádání experimentu je na obr. 29.2. Charakteristické vlastnosti tohoto jevu jsou

1. kinetická energie vyletujících elektronů nezávisí na intenzitě dopadajícího záření,
2. uvolňování elektronů nastává jen pro kmitočty dopadajícího záření $\nu > \nu_0$.

V podstatě i na základě elektromagnetické teorie světla vyjádřené Maxwellovými rovnicemi bylo možno očekávat takový jev, avšak pro platnost uvedených poznatků nebyla tato teorie schopna poskytnout žádný rozumný argument. Správné vysvětlení jevu podal až r. 1905 Einstein na základě zpřesnění Planckovy hypotézy, že totiž kvantovou povahu má nejen samotný jev emise elektromagnetického záření, ale i její absorpce. Elektromagnetické záření se tedy šíří v podobě "korpuskulí" (fotonů), které mají nejen energii $W=h\nu$, ale v souladu se vztahem (24.55) i hybnost $p=W/c=h\nu/c$, (což je vztah (29.2)) a hmotnost $m=h\nu/c^2$. Zápis (29.3) vyplývá z předchozího vztahu na základě rovnic $\nu=\omega/2\pi$, $c=\nu\lambda$ a definice vlnového vektoru (věta 24.1).

Podle Einsteina se energie fotonu $W=h\nu$ absorbovaná v pevné látce elektronem, spotřebuje zčásti na překonání vazebních a povrchových sil (tzv. výstupní práce *A*) a zbytek tvoří kinetická energie elektronu $mv^2/2$. Musí tedy platit rovnice

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv^2,$$

což je rovnice (29.4). Při $h\nu < A$ nemůže dojít k uvolňování elektronů, což vysvětluje existenci dolní frekvenční hranice fotoelektrického jevu. Minimální kmitočet, při kterém se elektron právě stačí uvolnit z povrchu látky s nulovou rychlostí je určen podmínkou

$$h\,\nu_o = A, \tag{29.6}$$

což např. v draslíku s A=2 eV dává $\nu_0 \approx 5.10^{14}$ Hz. Vznik fotoelektrického jevu v draslíku můžeme tedy očekávat při ozáření světlem s vlnovou délkou kratší než asi 600 nm, což velmi dobře souhlasí s pozorováním.

Dalším jevem svědčícím o existenci fotonů je tzv. Comptonův jev. Podle principu kvantové fyziky je energie fotonu nedělitelná, takže po ozáření absorbujícího prostředí zářením můžeme očekávat po průchodu látkou sice zmenšený počet fotonů, avšak se stejným kmitočtem. Ukázalo se však, že záření se při průchodu může "měnit" na záření s větší vlnovou délkou rozptýlené do stran. Tento jev vysvětlil na základě kvantové a relativistické fyziky Compton, proto se nazývá Comptonův jev. Představme si, že foton se chová jako částice, a proto při interakci s elektronem může dojít ke srážce podobající se srážce dvou pružných koulí (obr. 13.11). Po srážce se elektron - který byl původně v klidu - pohybuje jedním směrem a foton se změněnou energií, tj. i jiným kmitočtem, jiným směrem. I zde musí být splněny dva zákony: zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti. Pomocí rovnic (29.1) a (16.29) můžeme prvý z nich vyjádřit rovnicí

$$h\nu_o + m_o c^2 = h\nu + mc^2. \tag{29.7}$$

Zákon zachování hybnosti musíme napsat ve vektorovém tvaru. Hybnost fotonu před srážkou je podle (29.2) $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{i}h\,\nu_0$"c, po srážce $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{i}'h\,\nu'$"c, kde $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{i}'$ jsou jednotkové vektory ve směru pohybu fotonu před a po srážce. Hybnost elektronu před srážkou je p_{eo}=0 a po srážce $\boldsymbol{p}_e = m\boldsymbol{v}$. Zákon zachování hybnosti tedy můžeme psát

$$\boldsymbol{p}_o = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}_e,$$

a dále pak rozepsat na dvě skalární rovnice vyjadřující průměty do zvolených x a y os

$$\frac{h\nu_o}{c} = \frac{h\nu}{c}\cos\ \alpha + mv\ \cos\ \gamma$$

(29.8)

$$0 = \frac{h\nu}{c}\sin\ \alpha - mv\ \sin\ \gamma\ ,$$

(29.9)

kde γ je úhel, který svírá vektor hybnosti elektronu po srážce s původním směrem pohybu fotonu a α je úhel, pod kterým se rozptýlí nově vzniklý foton.

Výhodnější je přejít na vyjádření změny vlnové délky použitím vztahu $\lambda = c/\nu$. Rovnice (29.8) a (29.9) tím přejdou na tvar (s uvážením $m = ßm_o$)

$$\frac{h}{\lambda_o} - \frac{h}{\lambda}\cos\ \alpha = ß m_o v\ \cos\ \gamma$$

$$\frac{h}{\lambda}\sin\ \alpha = ß m_o v\ \sin\ \gamma\ .$$

Jejich umocněním na druhou a sečtením získáme

$$\frac{h^2}{\lambda_o^2} + \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda_o\lambda}\ \cos\ \alpha = ß^2 m_o^2 v_o^2\ .$$

(29.10)

Úpravou rovnice (29.7) dostaneme

$$\frac{h}{\lambda_o} - \frac{h}{\lambda} + m_o c = ß m_o c\ .$$

Tuto rovnici rovněž umocníme na druhou a potom od ní odečteme rovnici (29.10). Dostaneme další rovnici

$$\frac{2h^2}{\lambda_o\lambda}(\cos\ \alpha - 1) + 2m_o ch\left(\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda}\right) - m_o^2[ß^2(c^2 - v^2) - c^2] = 0\ .$$

(29.11)

Výraz v hranaté závorce se však rovná nule a ze zbývající rovnice po uvedení na společného jmenovatele výrazu v závorce už lehce dostaneme vztah (29.5). Měření na poměrně jednoduchém zařízení (obr. 29.4) tento vztah velmi dobře potvrdila (obr. 29.5). Tak můžeme Comptonův jev považovat za velmi přesvědčivý důkaz kvantové povahy částic pole - fotonů.

Je zajímavé si povšimnout otázky klidové hmotnosti fotonů z hlediska teorie relativity. Fotony, pohybující se ve vakuu rychlostí světla mají podle speciální teorie relativity hmotnost (16.27)

$$m_f = \lim_{v \to c} \frac{m_{of}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \; . \qquad (29.12)$$

V případě, že klidová hmotnost fotonu m_{of} je nenulová (i když nepatrně malá) roste m_f nade všechny meze ($m_f \to \infty$). Odstranit tento rozpor se skutečností je možné pouze přijetím podmínky $m_{of}=0$, tj. klidová hmotnost fotonu je nulová.

Z rovnice pro celkovou relativistickou energii částice (16.35) vyplývá, že jeho energie je $W=pc$ a hybnost $p=Wc=h\nu/c$, což je ve shodě s větami (29.1) a (29.2).

Poznámka:

Na závěr tohoto článku si musíme nevyhnutelně položit otázku: Co je tedy světlo - vlnění nebo proud částic? Vlnovou povahu nemůžeme zamítnout z hlediska poznatků interference, ohybu a polarizace, částicovou povahu si zase vynucují jevy uvedené v tomto článku. Jediná správná odpověď na tuto otázku je taková, že elektromagnetické záření (tj. i světlo) má současně vlnovou i korpuskulární povahu, i když se tyto vlastnosti v našich představách vylučují. Naštěstí neexistuje jev, v kterém by se současně projevily obě protichůdné povahy světla. Podle často používané interpretace se při vzniku a zániku záření projevují kvantové vlastnosti, při šíření naopak vlnové vlastnosti.

PLANCK Max Karl (plank), 1858-1947, německý fyzik, žák Helmholtze a Kirchhoffa, velký obdivovatel Boltzmanna. Intenzivně se zabýval hlavně termodynamikou, dále optikou a elektřinou. Analýza experimentálních výsledků získaných při vyzařování absolutně černého tělesa ho r. 1900 podnítila k zformulování odvážné hypotézy o nespojitosti (diskrétnosti) vyzařování a absorpce energie. Tato hypotéza narušila suverénnost klasické fyziky a stala se zdrojem nové fyzikální teorie - kvantové fyziky. Udělení Nobelovy ceny v r. 1918 bylo vyjádřením uznání za jeho aktivní úlohu v rozvoji moderní fyziky.

COMPTON Artur Holly (komptn), 1892-1962, americký fyzik, nositel Nobelovy ceny za fyziku z r. 1927. Objev jevu po něm pojmenovaném (rozptyl rentgenova záření při průchodu látkou) byl jedním z objevů v jeho celoživotním díle o rentgenově záření a představoval důležitý argument ve prospěch kvantové teorie záření.

STOLETOV Alexandr Grigojevič, 1839-1896, ruský fyzik. Zabýval se elektromagnetismem, optikou, molekulární fyzikou. Jako prvý změřil hysterezní křivku feromagnetika. Při sledování vnějšího fotoelektrického jevu r. 1888 objevil zákon závislosti fotoproudu na intenzitě světla (zákon Stoletova).

29.2 Záření absolutně černého tělesa

Zmínili jsme se již o tom, že absolutně černé těleso je takové těleso, které absorbuje všechno záření, které na ně dopadá. Velmi dobrým přiblížením takového tělesa je dutina tělesa, resp. její vstupní plocha (obr. 29.6). Záření vstupující otvorem do dutiny se mnohonásobně odráží a odevzdává tak celou svou energii tělesu.

V předcházejícím článku jsme ukázali, jakým myšlenkovým postupem můžeme najít zákony vyzařování takového tělesa (věty 29.5 až 29.7). V tomto článku si uvedeme jedno z možných odvození Planckova vyzařovacího zákona, z kterého vyplývají všechny ostatní zákony známé již před Planckem jako speciální případy.

29.5

Planckův vyzařovací zákon: spektrální hustota intenzity vyzařování $H_{e\lambda}$ absolutně černého tělesa je určena

$$H_{e\lambda} = \frac{d\Phi_e}{dS\; d\lambda} = \frac{8\pi\; hc^2}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1\right)}, \tag{29.13}$$

kde $d\Phi_e$ je část zářivého toku v oboru vlnových délek (λ; $\lambda + d\lambda$). Jednotka spektrální hustoty intenzity vyzařování je $[H_{e\lambda}] = W\, m^{-3}$.

29.6

Wienův zákon posuvu: maximum spektrální hustoty intenzity vyzařovaného tělesa připadá na vlnovou délku λ_{max}, která splňuje podmínku

$$\lambda_{max} T = b, \tag{29.14}$$

kde $b = 2{,}89.10^{-3}\; m\, K$ a T je teplota tělesa.

29.7

Stefanův - Boltzmannův zákon: Celková intenzita vyzařování H_e absolutně černého tělesa je přímo úměrná čtvrté mocnině jeho teploty

Po akceptování fotonové představy elektromagnetického záření je nejjednodušší představa, podle které je elektromagnetické pole v dutině černého tělesa fotonovým plynem v rovnovážném stavu. Vzhledem k tomu, že foton je bozón (částice, které nemají spin - článek 33.1) je nutno využít ke stanovení rozložení fotonů podle energií Boseho-Einsteinovu rozdělovací funkci (9.17). Na rozdíl od systému částic, jejichž počet je konstantní, se počet fotonů ani při konstantní celkové energii nezachovává (např. se absorbuje jeden foton a emitují dva). Tento fakt můžeme respektovat jen volbou $\alpha = 0$, proto Boseho-Einsteinova rozdělovací funkce pro fotonový plyn má tvar ($W = h\nu$)

$$f(\nu) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{29.16}$$

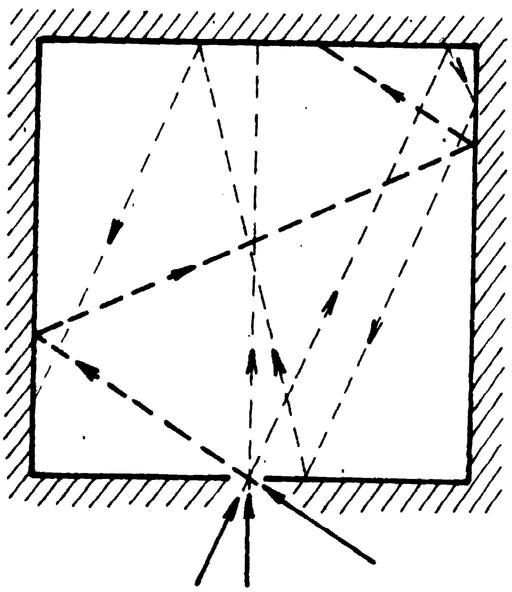
Počet fotonů, které najdeme v rovnovážném stavu s kmitočtem z intervalu ν a $\nu + d\nu$ je proto určen vztahem

$$dN = dN_o f(\nu) = dN_o \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{29.17}$$

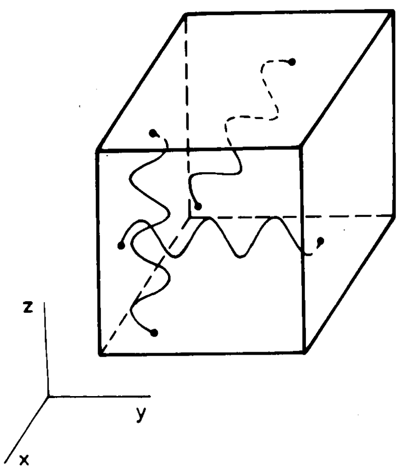
$$H_e = \sigma T^4,$$

(29.15)

kde σ je Stefanova - Boltzmannova konstanta (σ=5,67.10^{-8} Wm^{-2} K^{-4}).



Obr. 29.6 Model absolutně černého tělesa



Obr. 29.7 K odvození hustoty energie černého tělesa

kde dN_0 je počet všech možných stavů v intervalu kmitočtů $<\nu,\ \nu+d\nu>$. Vzniká otázka, kolik je takových možností. Abychom našli odpověď na tuto otázku, představme si (bez újmy na obecnosti), že černé těleso má tvar krychle o stranách L (obr. 29.7). Dále si připomeňme poznatek, že emise fotonu atomem trvá asi $10^{-8}s$, což při rychlosti fotonu c=3.10^{8} ms^{-1} znamená, že foton se "rozprostírá" v celé dutině. Ukazuje se proto rozumný předpoklad, že v této dutině se mohou vyskytovat jen takové fotony, pro které se do dutiny "směstná" právě celočíselný násobek jejich vlnové délky, jinými slovy v dutině jsou jen ty fotony, které vytvářejí v dutině stojaté vlny. Tuto podmínku můžeme vyjádřit rovnicí

$$N\lambda = N\frac{c}{\nu} = N\frac{hc}{h\nu} = N\frac{h}{p} = L,$$

$$kde \quad N = 1,2,3\dots\ ,$$

(29.18)

nebo

$$p = \frac{h}{L}N,$$

(29.19)

kde jsme využili vztahu pro hybnost fotonu (29.2). V trojrozměrné krychlové dutině je tedy možno psát tři obdobné rovnice pro každou z os

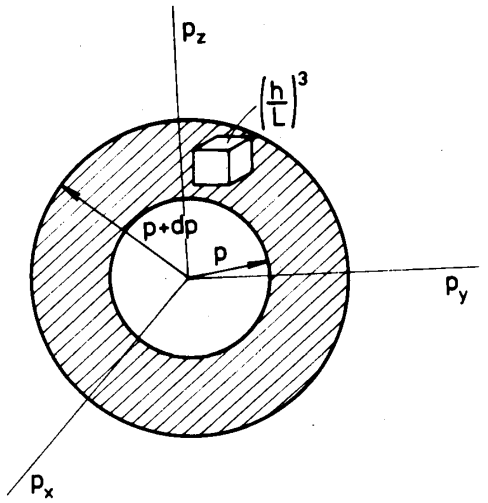
$$p_x = \frac{h}{L}n_x,\quad p_y = \frac{h}{L}n_y,\quad p_z = \frac{h}{L}n_z.$$

(29.20)

Vzhledem k rovnici $p^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2$ můžeme tyto tři rovnice sjednotit do jediné rovnice tvaru

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{L}{h}\right)^2 p^2,$$

(29.21)



Obr. 29.8 K výpočtu dovolených stavů v intervalu hybností p, p+dp

která říká, že stavů charakterizovaných hybností p je tolik, kolik kombinací druhých mocnin tří celých čísel dává hodnotu $(Lp/h)^2$. Je zajímavé si všimnout, že každý nový stav se odlišuje od tohoto stavu tím, že alespoň jedna složka vektoru p se liší od původní hodnoty o přírůstek (h/L). Z toho je tedy zřejmé, že v "hybnostním" (častěji se používá - impulsovém) prostoru připadá na jeden stav "objem" $(h/L)^3$. Pak je v intervalu hybností fotonů mezi p a $p + dp$ tolik možných stavů, kolikrát se tento "objem" $(h/L)^3$ nachází v "objemu" (obr.29.8)

$$dV_p = 4\pi p^2 dp,$$

což můžeme psát

$$dN_o = 2\frac{4\pi p^2 dp}{\left(\frac{h}{L}\right)^3} = \frac{8\pi}{h^3}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{h}{c} L^3 d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} L^3 d\nu,$$

(29.22)

kde jsme uvážili (vynásobením 2), že obecně polarizovaná stojatá vlna je ekvivalentní dvěma lineárně polarizovaným vlnám. Dosazením tohoto výrazu určujícího počet fotonů v intervalu kmitočtů ν a $\nu+d\nu$ v objemu ($V=L^3$) získáme vztah pro koncentraci fotonů v intervalu kmitočtů ν a $\nu+d\nu$

$$dn = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu .$$

Každý z těchto fotonů má energii $W=h\nu$, proto hustota energie připadající na diskutovaný interval kmitočtů je

$$dn\; h\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\;\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu$$

(29.23)

Je logické předpokládat, že vyzařování energie černým tělesem bude splňovat obdobný zákon. Uvážíme-li vztah mezi hustotou energie a intenzitou (24.51) a dále zavedeme-li místo kmitočtu vlnovou délku podle vztahu $\nu c/\lambda$ nebo i $|d\nu|=(\nu^2/c)\,d\lambda$, získáme Planckův vyzařovací zákon (29.13) (až na konstantu 1/4).

Odvození Wienova zákona posuvu (29.14) vyžaduje provést derivaci zákona (29.13) $dH_{e\lambda}/d\lambda$ a tuto položit rovnu nule. Dostaneme tak rovnici

$$xe^x = 5(e^x - 1),$$

(29.24)

kde jsme zavedli novou proměnnou $x=hc/k\lambda T$. Tato transcendentní rovnice má řešení $x=hc/k\lambda_{max}\, T=4{,}965$, takže platí

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{4{,}965\,k} = 2{,}89.10^{-3}\,mK,$$

což je Wienův zákon posuvu (29.14). Tento zákon stanoví, že při vyšší teplotě se maximum vyzařované energie posouvá ke kratším vlnovým délkám.

Výpočet celkové intenzity vyzařování H_e vyžaduje provést integraci Planckova zákona pro celý obor vlnových délek (29.13) $H_e=\int_\infty^0 H_{e\lambda}\,d\lambda$, nebo lépe pomocí kmitočtu

$$H_e = \int_0^\infty H_{e\nu}\; d\nu \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{c^2\left(e^{h\nu/kT}-1\right)}d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}T^4 = \sigma T^4,$$

(29.25)

kde jsme využili $\int_0^\infty x^3/\, e^x\text{-}1)\,dx = \pi^4/15$. Vztah (29.25) je již Stefanův - Boltzmannův zákon (29.15).

Poznámka:

Závislosti na obr. 29.1 popisující záření černého tělesa byly vysvětlovány již před Planckem na základě zákonů klasické fyziky. Jedním z těchto pokusů byl tzv. Rayleighův - Jeansův zákon ve tvaru

$$H_{e\lambda} = \frac{8\pi ckT}{\lambda^4} \tag{29.26}$$

který dobře popisoval pouze oblast velkých vlnových délek. Tento zákon okamžitě vyplývá z Planckova zákona (29.13) za předpokladu $hc \ll k\lambda T$, protože platí

$$e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \doteq 1 + \frac{hc}{k\lambda T} - 1 = \frac{hc}{k\lambda T},$$

což dosazeno do vztahu (29.13) dává konečný vztah (29.26). Potíž spočívala v tom, že tento zákon dával při výpočtu celkové vyzařované intenzity $H_e = -\int_\infty^0 H_{e\lambda} d\lambda$ nekonečnou hodnotu, protože integrovaná funkce pro horní mez diverguje. Tento výsledek vešel do historie pod názvem "ultrafialová katastrofa" a představoval v planckovském období neřešitelný problém.

Je zajímavé si všimnout, v čem byla hlavní chyba postupu odvozování vyzařovacího zákona před Planckem. Výpočty dovolených stavů oscilátorů dN_o byly prováděny podobně, jako v tomto odstavci. Pouze při výpočtu jejich energie se jejich počet vynásobil střední hodnotou energie jednoho oscilátoru, která zjistila následovně: v článku 23.1 při rozboru harmonického oscilátoru jsme ukázali, že celková energie harmonického oscilátoru se skládá z jeho kinetické a potenciální energie. Jelikož střední energie volných částic (majících jen kinetickou energii) je podle (14.3) $3/2kT$, musí být i střední potenciální energie harmonického oscilátoru být rovna $3/2kT$, střední kinetická energie rovněž $3/2kT$, takže celková střední energie oscilátoru je $3kT$. Dále, jeden obecně v prostoru kmitající oscilátor je ekvivalentní třem oscilátorům kmitajícím ve třech na sobě kolmých směrech, proto se jako střední energie jednoho oscilátoru vzala hodnota $W_s = 3kT/3 = kT$. Ze vztahu (29.23) však jasně vyplývá, že postulát o diskrétní struktuře energie elektromagnetického pole vede k tomu, že za střední hodnotu energie jednoho oscilátoru je nutno vzít výraz

$$W_s = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \tag{29.27}$$

který pro nízké hodnoty kmitočtů ν (velké hodnoty vlnových délek) $h\nu \ll kT$ redukuje na klasický vztah $W_s = kT$, což lehce dokážeme již shora uvedeným postupem. Pro velké (ultrafialové) kmitočty není vztah $W_s = kT$ přípustný, proto jeho využití v celém intervalu kmitočtů zákonitě vedlo k "ultrafialové katastrofě".

WIEN Wilhelm (vín), 1864-1928, německý fyzik, nositel Nobelovy ceny z r. 1911. Toto ocenění dostal zejména za teoretické a experimentální práce v oblasti tepelného záření. Jeho posunovací zákon, odvozený využitím termodynamických zákonitostí a Dopplerova principu již r. 1893, neztratil nic ze své platnosti a přesnosti ani v kvantové fyzice. Wien se zabýval i studiem katodových paprsků a jeho práce přispěly ke vzniku hmotnostní spektroskopie.

RAYLEIGH John Wiliam (rejli), 1842-1919, anglický fyzik, zakladatel teorie molekulového rozptylu světla, spoluautor jednoho ze zákonů vyzařování absolutně černého tělesa. Jeho podíl na výzkumu vlastností vzácných plynů a objev argonu mu přinesl v r. 1904 Nobelovu cenu.

JEANS James Hopwood (džinz), 1877-1946, anglický fyzik a astronom. Kromě teorie záření se zabýval hlavně astronomií a kosmologií. Jeho tzv. slapová teorie o vzniku sluneční soustavy která byla založena na vzniku planetární sluneční soustavy vlivem průletu další hvězdy blízko Slunce, byla později vyvrácena.