

ČÁST VI - KMITY A VLNY

- 23. Harmonický oscilátor
- 24. Vlnění
- 25. Elektromagnetické vlnění
- 26. Geometrická optika
- 27. Fyzikální optika
- 28. Nelineární optika

Periodické pohyby částic a těles (jako celků) nazýváme kmity, soubor kmitů jednotlivých bodů kontinua nazýváme vlnění. Příkladem kmitavého pohybu je např. pohyb kuličky zavěšené na pružině, příkladem vlnění je např. pohyb vody v jezeře po vhození kamene. Jestliže přihlížíme k diskrétní struktuře prostředí, hovoříme vždy jen o kmitech. Jestliže zkoumáme pevnou látku jako soubor izolovaných atomů a molekul, hovoříme o kmitech atomů a molekul, jestliže však nahradíme pevnou látku představou kontinua, tj. prostředím všude látkou (spojitě) vyplněného, máme co dělat s kmitáním nekonečného počtu "bodů". V takovém případě je vhodnější zavést pojem vlny a pohybový stav látky vyjádřit pomocí vhodné vlnové funkce. Matematická funkce, popisující kmit je funkcí jen času, vlnová funkce je funkcí času i prostorových souřadnic.

Podle uvedených definic mohou kmitat atomy, molekuly, jiné mikroskopické a makroskopické částice, celé soustavy (např. mostní konstrukce), vlnění můžeme zkoumat v plynech, kapalinách i pevných látkách a samozřejmě i ve fyzikálních polích, které jsou představě kontinua nejbližší.

Jestliže se kmitavý, resp. vlnový pohyb dá popsat pomocí harmonických funkcí, hovoříme o harmonických kmitech, resp. harmonickém vlnění. Podle tzv. Fourierovy věty můžeme libovolný kmitavý nebo vlnový pohyb vyjádřit jako superpozici jen harmonických kmitů, resp. vln se základními frekvencemi a jejich celočíselnými násobky. Proto harmonický kmit, resp. harmonickou vlnu můžeme považovat za základní typy periodického pohybu.

Jestliže hmotný objekt, resp. jejich soustavy kmitají s frekvencemi určenými jejich hmotnostmi a rozložením hmotnosti, hovoříme o tzv. vlastních kmitech. Jestliže vnější síly vynucují jejich kmitání, hovoříme o vynuceném kmitání.

23 HARMONICKÝ OSCILÁTOR

Netlumený harmonický oscilátor

Tlumený oscilátor

Vynucené kmity, rezonance

Skládání kmitů

Soustava harmonických oscilátorů

Těleso vykonávající harmonický kmitavý pohyb nazýváme harmonický oscilátor. Může jím být v prvném přiblížení např. masivní těleso na pružině (obr. 23.1), nebo atom či molekula pevné látky. Jestliže při jeho pohybu zanedbáme odpor prostředí, tření v ložisku apod., tj. nepřihlédneme-li k brzdícím silám (disipativního charakteru), mluvíme o netlumeném harmonickém oscilátoru. O tom, zdali kmitání hmotných objektů je harmonické, nebo není, rozhoduje povaha síly, která při výchylce z rovnovážné polohy na ně působí. Můžeme lehce ukázat, že kmitání je vždy harmonické, jestliže působící síla je úměrná výchylce z rovnovážné polohy. Takový oscilátor nazýváme přesněji lineární harmonický oscilátor. Jestliže je síla úměrná i vyšším mocninám výchylky, kmitání je periodické a může být rozloženo na harmonické kmity s více kmitočty. Takový oscilátor se nazývá nelineární harmonický oscilátor. V následujících úvahách budeme mít na mysli vždy jen lineární harmonický oscilátor, proto tento fakt nebudeme ani dále zdůrazňovat.

23.1 Netlumený harmonický oscilátor

Při popisu pohybu harmonického oscilátoru se budeme zajímat o kmitočet pohybu a celkovou energii (věty 23.1 až 23.4).

23.1

Netlumený harmonický oscilátor je každý fyzikální objekt schopný vykonávat periodický pohyb, na který při jeho vychýlení z rovnovážné polohy působí jen síla přímo úměrná výchylce \mathbf{r} a směřující

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r},$$

(23.1)

do rovnovážné polohy

kde k je konstanta úměrnosti ($k > 0$).

23.2

Pohybová rovnice ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) harmonického oscilátoru má s ohledem na předpoklad 23.1 tvar

$$\begin{aligned} -k\mathbf{r} &= m\mathbf{a}, \\ \text{neboli} \\ -k\mathbf{r} &= m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \end{aligned}$$

(23.4)

(obr. 23.1)

Zavedením označení $\omega = (k/m)^{1/2}$ můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

Perioda a kmitočet kmitavého pohybu harmonického oscilátoru jsou určeny vztahy

$$T = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}},$$

(23.2)

kde m je hmotnost harmonického oscilátoru.

23.3

Harmonický oscilátor vykonávající pohyb po elipse, resp. po kružnici, je ekvivalentní dvěma harmonickým oscilátorům kmitajícím ve dvou navzájem kolmých směrech (přímkách).

23.4

$$W = \frac{1}{2} k y_o^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y_o^2,$$

(23.3)

Celková energie harmonického oscilátoru je kde y_o je amplituda kmitů.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0},$$

(23.5)

Obecným řešením této diferenciální rovnice druhého řádu je funkce

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t,$$

(23.6)

kde \mathbf{a} a \mathbf{b} jsou konstantní vektory určené počátečními podmínkami $\mathbf{r}(t=0)=\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v}(t=0)=\mathbf{v}_0$. Místo zkoumání tohoto obecného harmonického pohybu se omezme na vyšetření harmonického pohybu na přímce. Jestliže totiž vyjádříme v rovnici (23.5) polohový vektor pomocí jeho dvou

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

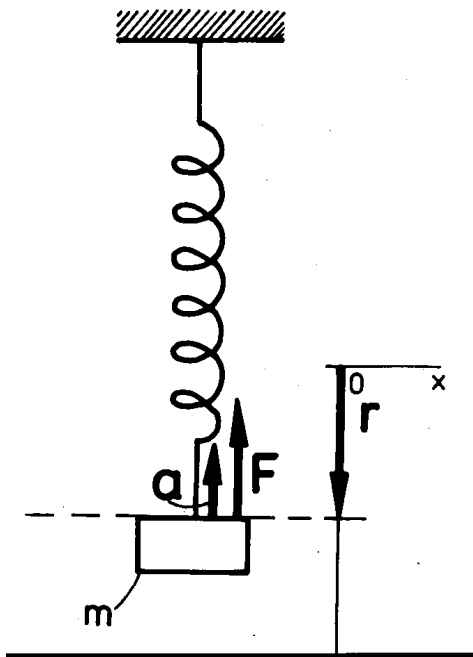
(23.7)

složek $\mathbf{r}=xi+yj$ (harmonický pohyb je vždy rovinný pohyb) a vynásobíme ji skalárně nejprve jednotkovým vektorem j , potom i dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

(23.8)

Tyto rovnice popisují dva harmonické pohyby ve dvou na sobě kolmých směrech a jsou ekvivalentní rovnici (23.5) popisující pohyb obecného lineárního harmonického oscilátoru. Tím jsme



Obr. 23.1 Příklad harmonického oscilátoru

dokázali tvrzení 23.3.

Řešením rovnice pro harmonický pohyb na přímce např. rovnice (23.7), pak je funkce

$$y = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

kterou pomocí substituce $a=y_0 \cos \varphi$ a $b=y_0 \sin \varphi$ můžeme vyjádřit i ve vhodnějším tvaru

$$y = y_0 \sin (\omega t + \varphi),$$

(23.9)

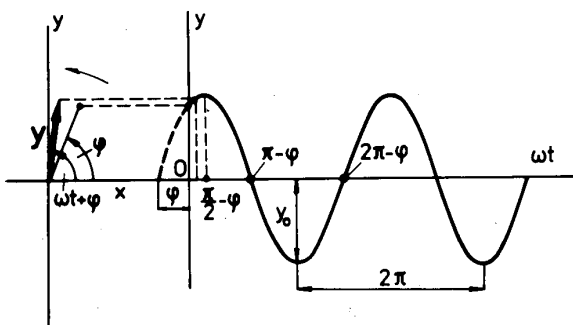
kde výraz $(\omega t + \varphi)$ je fáze harmonického kmitavého pohybu.

Grafickým obrazem harmonického oscilátoru je tedy např. sinusoida s amplitudou y_0 , s periodou $T=2\pi/\omega=2\pi(m/k)^{1/2}$ a počáteční fází φ (to je fáze $|\omega t + \varphi|$ pro čas $t=0$) (obr. 23.2). Tyto výsledky jsou obsahem věty 23.2.

Celková energie harmonického oscilátoru se skládá z jeho kinetické energie W_k

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m y_0^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

(23.10)



Obr. 23.2 Grafický záznam pohybu harmonického oscilátoru

a potenciální energie W_p , vztah (11.30)

$$W_p = - \int_0^y F \cdot dr = - \int_0^y (-ky) dy = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \sin^2 (\omega t + \varphi).$$

(23.11)

Celková energie harmonického oscilátoru je tedy součtem kinetické (23.10) a potenciální (23.11) energie, což vede ke vztahu (23.3). Dá se lehce dokázat, že celková energie oscilátoru pohybujícího se po elipse se rovná součtu energií dvou ekvivalentních a navzájem kolmých kmitajících oscilátorů.

Poznámka:

Ze vztahu (23.3) vyplývá na první pohled samozřejmý výsledek, že totiž volbou počátečních podmínek můžeme dostat všechny možné hodnoty energie v určitém intervalu (ohraničeném např. pevností pružiny). Energetické spektrum harmonického oscilátoru je tedy spojité. Později ukážeme, že toto, ze stanoviska tzv. klasické fyziky úplně samozřejmé konstatování, není pravdivé a že spektrum harmonického oscilátoru je vždy diskrétní. Rozdíly jsou však pozorovatelné jen při zkoumání mikrofyzikálních oscilátorů, tj. atomů a molekul.

23.2 Tlumený oscilátor

Při pohybu harmonického oscilátoru v reálných podmínkách působí vždy síly, které amplitudu kmitavého pohybu zmenšují a po určitém čase kmitání přestane. Takový oscilátor pak nazýváme tlumený oscilátor. Charakterizují ho věty 23.5 až 23.7.

23.5

Síla, kterou prostředí brzdí pohyb tělesa, je při dostatečně malých rychlostech přímo úměrná okamžité rychlosti tělesa

$$\mathbf{F}_b = -k_b \mathbf{v} = -k_b \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (23.12)$$

23.6

Veličina $b = k_b/2m$, kde je m hmotnost oscilátoru, se nazývá konstanta útlumu, $[b] = s^{-1}$. Podíl dvou po sobě následujících maximálních výchylek ve stejném směru $\lambda = y(t_i)/y(t_i+T)$ se nazývá útlum a jeho přirozený logaritmus logaritmický dekrement $\delta = \ln \lambda$. Platí rovnice

$$b = \frac{\delta}{T} = \frac{\ln \lambda}{T}. \quad (23.13)$$

23.7

Je-li splněna podmínka $b < \omega_0$, kde ω_0 je charakteristický úhlový kmitočet harmonického oscilátoru (bez tlumení) $\omega_0^2 = k/m$, vznikne tlumený kmitavý pohyb, je-li $b > \omega_0$ vznikne

Jestliže uvážíme platnost tvrzení 23.1 a 23.5 můžeme psát pohybovou rovnici $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ tlumeného oscilátoru ve tvaru (obr. 23.3)

$$-k\mathbf{r} - k_b \mathbf{v} = m\mathbf{a}, \quad (23.14)$$

nebo s uvážením definičních vztahů pro rychlost a zrychlení

$$-k\mathbf{r} - k_b \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (23.15)$$

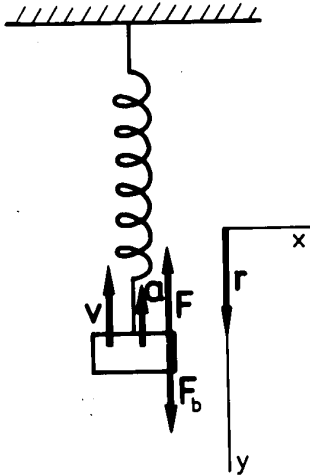
Jestliže se omezíme na případ oscilátoru, kmitajícího na přímce (v ose y) získáme

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2b \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 = 0, \quad (23.16)$$

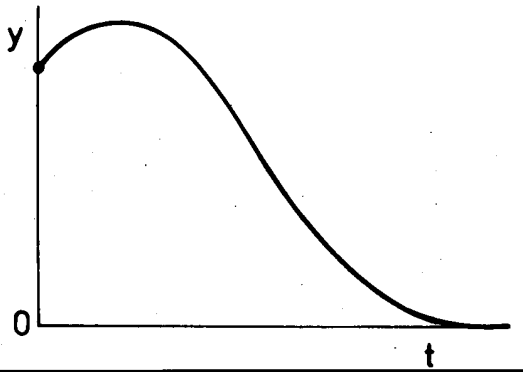
přičemž jsme hned využili vztah $k/m = \omega_0^2$ pro úhlový kmitočet z předchozího článku a vztah $k_b/m = 2b$, který podle věty 23.6 definuje konstantu útlumu.

Řešení diferenciální rovnice (23.16)

aperiodický (tj. přetlumený) pohyb a je-li $b = \omega_0$ tzv. hraniční pohyb.



Obr. 23.3 Příklad tlumeného oscilátoru



Obr. 23.4 Grafický záznam pohybu tlumeného oscilátoru pro $b > \omega_0$

můžeme hledat ve tvaru

$$y = A e^{\alpha t}.$$

Dosažením této funkce do rovnice (23.16) dostaneme pro parametr α charakteristickou rovnici

$$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (23.17)$$

která má dva kořeny

$$\alpha_{1,2} = -b \pm (b^2 - \omega_0^2)^{1/2} = -b \pm \omega'. \quad (23.18)$$

Obecným řešením rovnice (23.16) je proto funkce

$$y = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} = e^{-bt} (A_1 e^{\omega' t} + A_2 e^{-\omega' t}). \quad (23.19)$$

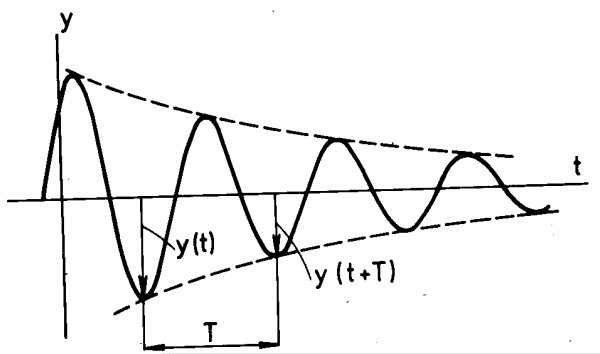
Vidíme, že kdyby veličina ω' byla reálná, tj. $b > \omega_0$, nevznikl by periodický pohyb. Grafickým obrazem funkce (23.19) je totiž v tomto případě křivka znázorněná na obr. 23.4. V opačném případě, je-li $b < \omega_0$ (tj. při malém tlumení), vznikne tlumený kmitavý pohyb. Dokážeme to tak, že označíme $\omega = i(\omega_0^2 - b^2)^{1/2} = i\omega_0$ a použijeme Eulerův vztah pro funkci $e^{i\omega t}$. Dostaneme funkci

$$y = e^{-bt} [A_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)] = e^{-bt} [(A_1 + A_2) \cos \omega t + (A_1 - A_2) i \sin \omega t]. \quad (23.20)$$

Substitucemi $(A_1 + A_2) = A = y_0 \sin \varphi$ a $(A_1 - A_2) i = B = y_0 \cos \varphi$ přejde funkce (23.20) do tvaru

$$y = y_0 e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi), \quad (23.21)$$

kde $\omega = (\omega_0^2 - b^2)^{1/2}$, z které je hned zřejmé, že jde o tlumený kmitavý pohyb. Jejím grafickým obrazem je křivka znázorněná na obr. 23.5.



Obr. 23.5 Grafický záznam pohybu tlumeného oscilátoru pro $b < \omega_0$

Teoreticky existuje ještě i třetí případ, je-li $b = \omega_0$. V tomto případě není funkce (23.19) obecným řešením rovnice (23.16), protože $\omega = 0$. Dá se dokázat, že v tomto případě můžeme řešení napsat ve tvaru

$$y = e^{-bt}(A - Bt). \quad (23.22)$$

Vidíme, že v čase $t = A/B$ je $y = 0$, takže oscilátor se vrátí do rovnovážné polohy.

Výsledky obsažené ve vztazích (23.19 - 23.22) jsou obsahem věty 23.7. Vztah (23.13) dokážeme jednoduše tak, že při kmitavém pohybu zvolíme dvě maximální výchylky následující po době $T = 2\pi/\omega$. Podle vztahu (23.21) platí pro poměr takových dvou výchylek vztah

$$\lambda = \frac{y(t)}{y(t+T)} = \frac{y_0 e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)}{y_0 e^{-b(t+T)} \sin[\omega(t+T) + \varphi]} = e^{bT}, \quad (23.23)$$

z kterého bezprostředně vyplývá vztah (23.13). Pomocí tohoto vztahu můžeme velmi jednoduše změřit konstantu útlumu tlumeného oscilátoru.

23.3 Vynucené kmitání, rezonance

Významným případem kmitavého pohybu je tzv. vynucené kmitání, při kterém vnější síla nutí látkový objekt kmitat s obecně jiným kmitočtem než je kmitočet vlastních kmitů. Jestliže se však oba kmitočty k sobě přibližují, vzniká důležitý jev, který nazýváme rezonance. Je často velmi nežádoucím jevem, protože způsobuje mechanické poškození zařízení a strojů, na druhé straně však umožňuje řešit celou řadu technicky významných problémů (např. měření počtu otáček, selektivní příjem elektromagnetických vln apod.). Charakteristiky rezonance a podmínky jejího vzniku jsou shrnuty ve větách 23.8 až 23.9.

23.8

Vnější periodická síla s úhlovým kmitočtem ω_v způsobuje, že objekt schopný kmitat vykonává v ustáleném stavu kmity s úhlovým kmitočtem ω_v a amplitudou A

$$A = \frac{F_o}{m \left[(\omega_o^2 - \omega_v^2)^2 + 4b^2 \omega_v^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (23.24)$$

kde F_o je amplituda vnější síly, m hmotnost kmitajícího objektu, ω_o je vlastní úhlový kmitočet a b konstanta útlumu. Fázový posuv φ_v mezi vnější silou a vynucenými kmity splňuje podmínku

$$\operatorname{tg} \varphi_v = - \frac{2 \omega_v b}{\omega_o^2 - \omega_v^2}. \quad (23.25)$$

23.9

Rezonance nastává tehdy, když $\omega_v = \sqrt{\omega_o^2 - 2b^2}$. Při zanedbatelném tlumení roste v tomto případě amplituda kmitů nade všechny meze a fázový posuv φ_v se blíží $-\pi/2$.

Uvažujme o hmotném bodě zavěšeném na pružině (obr. 23.6), na který působí vynucující periodická síla

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_o \sin \omega_v t.$$

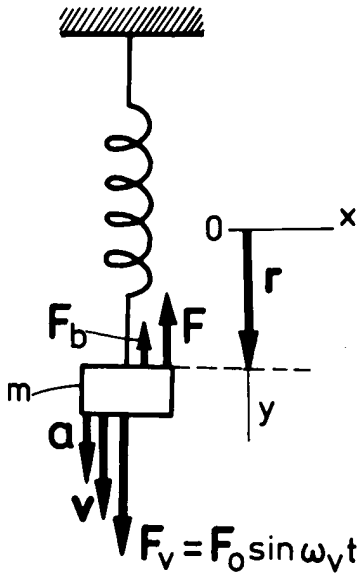
Jestliže uvážíme všechny síly, které způsobují pohyb, můžeme psát pohybovou rovnici ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), konkrétně její průmět do osy y

$$-ky - k_b \frac{dv}{dt} + F_o \sin \omega_v t = m \frac{d^2 v}{dt^2} \quad (23.26)$$

kde prvá síla na levé straně je síla od "vazby" způsobující harmonický pohyb oscilátoru, druhá síla je souhrnná síla pro odpor prostředí a třetí síla je vnější vynucující periodická síla. Tuto rovnici můžeme dále upravit na tvar

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega_o^2 y = \frac{F_o}{m} \sin \omega_v t, \quad (23.27)$$

kde jsme s ohledem na předcházející články označili $2b = k_b/m$ a $k/m = \omega_o^2$. Tato rovnice je diferenciální rovnice II. řádu s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranou. Základní poznatky o řešení diferenciálních rovnic vedou k výsledku, že řešení rovnice (23.27) můžeme napsat ve tvaru součtu obecného řešení příslušné rovnice bez pravé strany, tj. funkce (23.19) a tzv. partikulárního řešení, tj. funkce, která splňuje původní rovnici. Očekáváme, že vnější síla s úhlovým kmitočtem ω_v , proto můžeme navrhnout jako partikulární řešení funkci



Obr. 23.6 Příklad vzniku vynucených kmitů

$$y_p = A \sin(\omega_v t + \varphi_v).$$

(23.28)

Konstanty A a φ_v musíme zvolit tak, aby rovnice (23.27) byla splněna. Obecné řešení rovnice (23.27) můžeme proto psát ve tvaru

$$y = y_0 e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi) + A \sin(\omega_v t + \varphi_v) \quad (23.29)$$

v kterém y_0 a φ jsou konstanty vyplývající z počátečních podmínek. Ze tvaru první části funkce (23.29) však vyplývá, že po uplynutí určitého času $t \gg 1/b$ se tato část řešení "utlumí". Vznikne kmitavý pohyb, který již nezávisí na počátečních podmínkách a je určen jen funkcí (23.28). Jestliže se tedy nezajímáme o přechodový jev, tj. jev do ustálení kmitání, můžeme se zaměřit jen na funkci (23.28). Nalezením příslušných derivací a dosazením do rovnice (23.27) dostaneme rovnici

$$-\omega_v^2 A \sin(\omega_v t + \varphi_v) + 2b\omega_v A \cos(\omega_v t + \varphi_v) + \omega_o^2 A \sin(\omega_v t + \varphi_v) = \frac{F_o}{m} \sin \omega_v t. \quad (23.30)$$

Jestliže v této rovnici rozepíšeme funkce $\sin(\omega_v t + \varphi_v)$ a $\cos(\omega_v t + \varphi_v)$ podle známých pouček a porovnáme koeficienty při funkcích $\sin \omega_v t$ a $\cos \omega_v t$ dostaneme pro konstanty A a φ_v dvě rovnice

$$\left(\omega_o^2 - \omega_v^2\right)A \cos \varphi_v - 2b\omega_v A \sin \varphi_v = \frac{F_o}{m} \left(\omega_o^2 - \omega_v^2\right)A \sin \varphi_v + 2b\omega_v A \cos \varphi_v = 0.$$

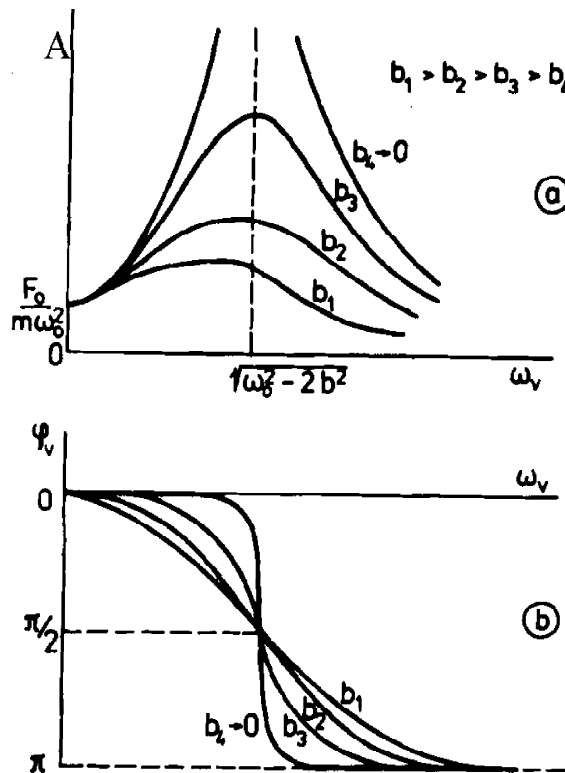
Jejich řešením dostaneme vztahy (23.24) a (23.25), které jsme měli odvodit. Z nich vyplývá (extrém vztahu

(23.24), $dA/d\omega_v=0$), že rezonanci $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$ je při malém tlumení $b \ll \omega_0$ fázové posunutí kmitů za vynucující silou $\varphi_v = -\pi/2$ a amplituda roste nade všechny meze (obr. 23.7a, b).

Z uvedeného vyplývá, že je velmi nebezpečné namáhat různé konstrukce (stroje, budovy, mosty) periodickou silou s periodou blízkou nebo rovnou periodě vlastních kmitů. Amplituda vynucených kmitů by mohla narůst do takových hodnot, že by byla překročila mez pevnosti materiálů a mohlo by dojít k havárii. Na druhé straně je na tomto principu založen mechanismus přístrojů měřících otáčky, mechanismus přenosu zpráv, mechanismus sluchu atd.

HELMHOLTZ Herman Ludwig Ferdinand (helmholz), 1821-1894, německý fyzik a fyziolog. Po vystudování medicíny působil nejdříve jako profesor anatomie a fyziologie. Výsledky jeho vědeckých prací v hydrodynamice (teoreticky zpracoval vířivé pohyby kapalin) mu přinesly více nabídek na místo profesora fyziky; jednu z nich v r. 1871 přijal. Helmholtzovi patří prvenství v matematické formulaci zákona zachování energie a důkaz jeho platnosti na tehdy známé fyzikální jevy. Ve svých pracech akustiky a optiky velmi účinně spojoval vědecké poznatky z fyziky a fyziologie. Řešil rovněž některé problémy elektrodynamiky, elektrochemie a termodynamiky. V mechanice zavedl pojem potenciální energie. Různorodost a vysoká vědecká úroveň jeho díla zařazují Helmholtze mezi nejvýznamnější přírodovědce 19. století.

S případem rezonance jsme se již setkali v oblasti elektrických jevů. Rovnice 23.27 je zcela ekvivalentní rovnici (22.27), přičemž funkci vnější vynucované síly tam má vnější elektromotorické napětí a funkci výchylky



Obr. 23.7 Závislost a) amplitudy, b) fázového posunu mezi výchylkou a vynucující silou na úhlovém kmitočtu vynucující síly

elektrický proud. Tlumící člen má pak tvar $b = R/2L$. Jev rezonance se v této oblasti využívá, jak jsme již uvedli, v oblasti přenosu informací.

23.4 Skládání kmitů

Jestliže na hmotný bod, který může vykonávat kmitavý pohyb působí současně více sil z nich každá sama o sobě způsobí kmitavý pohyb v jiném směru, vzniká složitý periodický pohyb, který můžeme považovat za superpozici kmitů odpovídající jednotlivým silám. V tomto případě hovoříme o skládání kmitů. Může se přitom jednat o síly rovnoběžné nebo nerovnoběžné, vyvolávající pohyb se stejnými nebo odlišnými kmitočky a se stejnými nebo odlišnými počátečními fázemi. Existuje proto velké množství případů skládání kmitů. V tomto článku uvedeme jen nejdůležitější z nich (věty 23.10 až 23.14).

23.10

Skládání kolmých kmitů se stejnými kmitočky: složením dvou kolmých kmitů $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$ a $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$ vzniká podle rozdílu počátečních fází $\varphi_2 - \varphi_1$ a poměru amplitud x_0/y_0 pohyb po přímce ($\varphi_2 - \varphi_1 = N\pi$), kružnici ($\varphi_2 - \varphi_1 = (2N+1)\pi/2$, $x_0 = y_0$) nebo po elipse (obr. 23.8), kde N je celé číslo, $N=0, 1, 2, \dots$

23.11

Skládání kolmých kmitů s odlišnými kmitočky: složením dvou kolmých kmitů s různými úhlovými kmitočky $\omega_1 \neq \omega_2$ vzniká rovinná křivka, která je obecně neuzavřená. Jestliže jsou úhlové kmitočky v poměru celých čísel, jsou tyto křivky uzavřené a nazývají se Lissajousovy křivky (obr. 23.9).

23.12

Skládání rovnoběžných kmitů se stejnými kmitočky: složením dvou rovnoběžných kmitů se stejnými kmitočky $y_1 = y_{01} \sin(\omega t + \varphi_2)$ vzniká kmitavý pohyb $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$, při kterém amplituda a počáteční fáze splňují podmínku

$$y_0 = \left[y_{01}^2 + y_{02}^2 + 2y_{01}y_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (23.31)$$

Dva vzájemně na sebe kolmé kmitavé pohyby se stejným kmitočtem s různými amplitudami a rozdílnými počátečními fázemi můžeme podle vztahu (23.9) vyjádřit funkcemi

$$\begin{aligned} x &= x_0 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ a \\ y &= y_0 \sin(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Jestliže platí $\varphi_2 - \varphi_1 = N\pi$ je výsledný pohyb přímkový, protože v tomto případě je $y = \pm(y_0/x_0)x$, což je rovnice přímky. Jestliže je splněna podmínka $\varphi_2 - \varphi_1 = (2N+1)\pi/2$ a navíc $x_0 = y_0$, vznikne pohyb po kružnici, protože v tomto případě je $x^2 + y^2 = x_0^2$, což je rovnice kružnice. V ostatních případech se výsledný pohyb odehrává po elipse. Jednotlivé případy těchto pohybů jsou znázorněny na obr. 23.8. Tím jsme dokázali tvrzení 23.10.

Jestliže se skládají dva na sebe kolmé kmity s odlišnými kmitočky (což je možno lehce uskutečnit např. pomocí oscilografu), můžeme funkce opisující oba pohyby psát

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_{o1} \sin \varphi_1 + y_{o2} \sin \varphi_2}{y_{o1} \cos \varphi_1 + y_{o2} \cos \varphi_2}. \quad (23.32)$$

Výsledná amplituda je maximální y_o $\max = y_{o1} + y_{o2}$, jestliže rozdíl počátečních fází je $\varphi_2 - \varphi_1 = 2N\pi$, minimální y_o $\min = |y_{o1} - y_{o2}|$ jestliže rozdíl počátečních fází je $\varphi_2 - \varphi_1 = (2N+1)\pi$, kde N je celé číslo.

23.13

Skládání rovnoběžných kmitů odlišných kmitočtů: výsledkem tohoto skládání je kmitavý pohyb s proměnlivou amplitudou. Je základem tzv. amplitudové modulace.

23.14

Skládání nekonečného počtu rovnoběžných kmitů s násobnými (základními a vyššími harmonickými) kmitočty: výsledkem je periodický kmitavý pohyb podle obecně velmi komplikované funkce. Větší význam má obrácená úloha: rozklad libovolného periodického pohybu na harmonický pohyb se základním kmitočtem a pohyby s tzv. vyššími harmonickými. Tento postup se nazývá Fourierova analýza. Podle tzv. Fourierovy věty můžeme libovolný periodický pohyb charakterizovaný funkcí $y=y(t)$ vyjádřit součtem

$$y(t) = y_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega t), \quad (23.33)$$

přičemž koeficienty y_o , a_n a b_n splňují rovnice

$$\begin{aligned} x &= x_o \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ a \\ y &= y_o \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Výsledkem skládání takových pohybů je pohyb s velmi složitou křivkou dráhy. Příslušné trajektorie (tzv. Lissajousovy křivky) leží uvnitř obdélníka, jehož strany jsou $2x_o$, $2y_o$ (obr. 23.9). Je-li poměr frekvencí racionální číslo, jsou trajektorie uzavřené. Jejich tvar závisí na poměru ω_1/ω_2 , x_o/y_o a na rozdílu fází $\varphi_2 - \varphi_1$. Několik typů těchto křivek uvádíme na obr. 23.9. Vzhledem ke složitosti výpočtů nebudeme zde uvedená konstatování dokazovat.

Dva rovnoběžné kmitavé pohyby se stejnými kmitočty můžeme vyjádřit pomocí funkcí

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{o1} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ a \\ y_2 &= y_{o2} \sin(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Oba harmonické pohyby je možno získat průmětem vektorů y_{o1} a y_{o2} rotujících stejnou úhlovou rychlostí ω (obr. 23.10). Vektorovým součtem obou vektorů je vektor y_o , jehož průmětem do osy y získáme hledaný výsledný pohyb ve tvaru

$$y = y_o \sin(\omega t + \varphi), \quad (23.35)$$

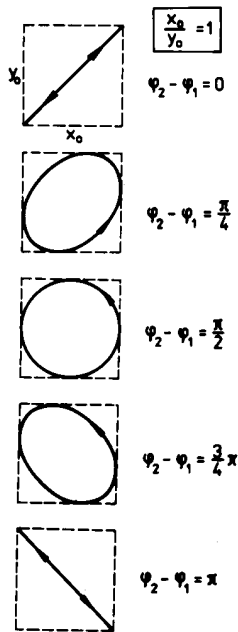
přičemž je z obr. 23.10 patrné, že platí vztahy (23.31) a (23.32). Podmínka maxima y_o $\max = y_{o1} + y_{o2}$ nastane tehdy, jestliže ve vztahu (23.31) položíme $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, což nastane pro $\varphi_2 - \varphi_1 = 2N\pi$. Podmínka minima y_o $\min = |y_{o1} - y_{o2}|$ nastane tehdy, položíme-li $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, což je splněno pro $\varphi_2 - \varphi_1 = (2N+1)\pi$.

$$y_o = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt,$$

$$a_n = T \int_0^T y(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(n\omega t) dt.$$

(23.34)



Obr. 23.8 Grafický záznam pohybu vzniklého složením dvou navzájem kolmých kmitů stejného kmitočtu a amplitudy

Tento postup lze rozřířit i například skládání libovolného (např. n) počtu harmonických rovnoběžných kmitů typu

$$y_i = y_{oi} \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Výsledný kmitavý pohyb má tvar (23.35), přičemž platí (obr. 23.10)

$$y_o = \left[\left(\sum_1^n y_{oi} \sin \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_1^n y_{oi} \cos \varphi_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_1^n y_{oi} \sin \varphi_i}{\sum_1^n y_{oi} \cos \varphi_i}.$$

(23.36)

Tento postup se velmi často používá v optice a při výpočtu antén.

Dva rovnoběžné kmitavé pohyby s odlišnými kmitočty můžeme vyjádřit funkcemi

$$y_1 = y_{o1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

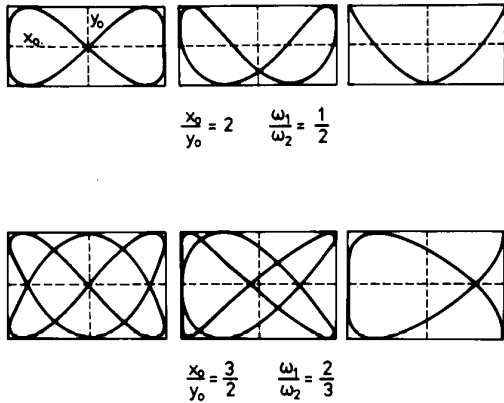
$$y_2 = y_{o2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Nejjednodušším případem skládání kmitů tohoto typu je skládání kmitů se stejnými amplitudami $y_{o1} = y_{o2} = y_o$ a stejnými počátečními fázemi $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Dostaneme tak kmitavý pohyb popsany funkcí

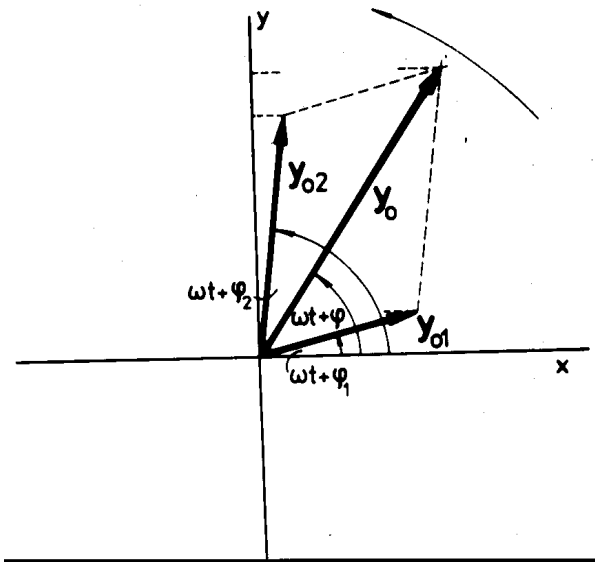
$$y = y_1 + y_2 = y_o (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t).$$

(23.37)

Jestliže použijeme známou součtovou větu z trigonometrie, můžeme tuto funkci vyjádřit ve tvaru



Obr. 23.9 Lissajousovy křivky pro různé fázové posuvy mezi kmitů



Obr. 23.10 Složení dvou rovnoběžných kmitů stejného kmitočtu pomocí rotujících vektorů

$$\begin{aligned}
 y &= 2y_o \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = \\
 &= y_o^x \sin \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{23.38}$$

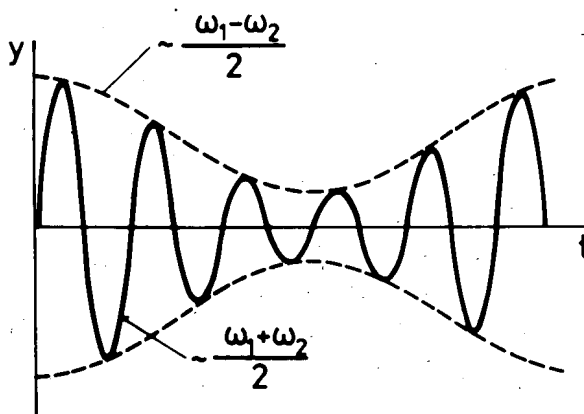
Výsledný pohyb tedy můžeme považovat za harmonický pohyb s úhlovým kmitočtem $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ a s časově proměnlivou amplitudou $y_o^x = 2y_o \cos[(\omega_1 - \omega_2)/2]t$ (obr. 23.11). Tento jev se využívá při tzv. amplitudové modulaci.

Důkaz rozkladu libovolné periodické funkce (alespoň po částech spojitě) na soubor harmonických kmitů se základní frekvencí a s celými násobky základní frekvence (vztah /23.33/) se redukuje na důkaz možnosti nalezení koeficientů y_o , a_n a b_n . Využívá se přitom známého poznatku z matematiky, podle kterého platí rovnice

$$\int_0^T \cos(m\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{pro } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(m\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha = 0.$$

Analogický výsledek platí i pro funkci $\sin(m\alpha)$ a $\sin(n\alpha)$. Jestliže tedy vynásobíme funkci (23.33) funkcí $\cos(m\omega t)$ a integrujeme podle času přes celou periodu, všechny členy na pravé straně vypadnou kromě členu obsahujícího a_n , který má hodnotu $a_n T/2$. Podobně při vynásobení funkcí $\sin(n\omega t)$ vypadnou všechny členy kromě členu obsahujícího b_n , který se rovná $b_n T/2$. Příslušné levé strany tvoří integrály $\int_0^T y(t) \cos(n\omega t) dt$, resp. $\int_0^T y(t) \sin(n\omega t) dt$. Členy y_o najdeme



Obr. 23.11 Vznik amplitudové modulaace

integrací funkce (23.33) podle času přes celou periodu, čímž vypadnou všechny členy obsahující a_n a b_n a na pravé straně zůstane člen $y_0 T$ a na levé člen $\int_0^T y(t) dt$. Tak dostaneme všechny koeficienty Fourierova rozvoje uvedeného ve větě 23.14. Fourierova analýza je velmi významná jak v oblasti analýzy zvuků (rozklad zvuku na základní tón a vyšší harmonická), tak i v analýze polí.

FOURIER Jean Baptiste Joseph (furié), 1768-1830, matematik a fyzik působící na Polytechnice v Paříži. Jeho doménou byly zejména aplikace matematiky ve fyzice a v technických disciplínách, které mají i dnes velké praktické využití, zejména tzv. Fourierova analýza (vypracovaná původně na řešení problémů vedení tepla). Celé matematické dílo Fouriera je vzorným příkladem toho, jak snaha vyřešit fyzikální problémy vyvolávala vždy velký pokrok v matematice.

23.5 Soustava harmonických oscilátorů

Soustava navzájem nezávislých oscilátorů má vlastnosti, které najdeme jednoduchým součtem veličin charakterizujících jednotlivé oscilátory. Jestliže ale jsou tyto oscilátory navzájem vázané, jak je to např. v případě dvou kuliček zavěšených na pružinách, které jsou propojeny další pružinou, nebo v soustavě atomů a molekul pevné látky, vznikají nové vlastnosti, které nemůžeme dostat na základě principu aditivnosti. Potvrzuje se zde známá filosofická pravda, že celek je vždy obsahově bohatší realita, než jednoduchý souhrn jeho částí. Jelikož se zde jedná o obecný, z hlediska mikrofyziky velmi důležitý poznatek, vyšetříme podrobněji kmitový stav tzv. lineárního řetězce, který nám může posloužit jako model tzv. jednorozměrného krystalu. Zhuštěním oscilátorů pak můžeme přejít na model tzv. kontinua, v kterém místo kmitání zavedeme představu vlnění.

Lineárním řetězcem budeme nazývat soustavu v přímce rozložených stejných harmonických oscilátorů s konstantními vzdálenostmi (obr. 23.12). Tyto oscilátory jsou navzájem propojeny pružnými vazbami a odpovídající síly vyhovují rovnici (23.1). Budeme předpokládat, že kmitání jednotlivých oscilátorů se odehrává v přímce řetězce. Pro takový řetězec platí věty 23.15 a 23.16.

23.15

Možné úhlové kmitočty soustavy harmonických oscilátorů tvořících lineární řetězce splňují rovnici (tzv. disperzní vztah)

Uvažujme o L vzájemně vázaných harmonických oscilátorech, které kmitají v přímce lineárního řetězce. Jejich výchylky z rovnovážné polohy označíme y_n , přičemž n nechť je pořadové číslo oscilátoru, pro které platí $n=0,1,2,\dots,L$. Jestliže

$$(\omega)_p^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\frac{pa}{2} \right), \quad (23.39)$$

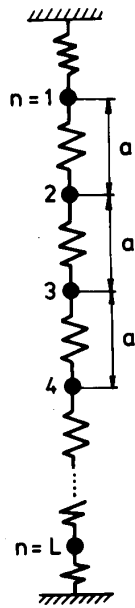
kde k je konstanta vazby, m je hmotnost oscilátoru, a je vzdálenost mezi oscilátory a parametr p vyhovuje podmínce

$$p = \frac{2\pi}{La} l, \quad l = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \pm \frac{L}{2}, \quad (23.40)$$

kde L je počet oscilátorů a l je celé číslo.

23.16

V soustavě L vázaných oscilátorů lineárního řetězce je dovolených právě L kmitových stavů.



Obr. 23.12 Lineární řetězec L oscilátorů

uvážíme podmínku 23.1 charakterizující sílu vyvolávající harmonický pohyb, můžeme sílu, která působí na n -tý oscilátor ze strany $(n-1)$ -tého oscilátoru vyjádřit funkcí

$$F_{n-1,n} = -k(y_n - y_{n-1})$$

a sílu působící ze strany $(n+1)$ -tého oscilátoru vztahem

$$F_{n+1,n} = -k(y_n - y_{n+1})$$

Výsledná síla působící na n -tý oscilátor je proto

$$\begin{aligned} F_n &= -k(y_n - y_{n-1}) - k(y_n - y_{n+1}) = \\ &= -k[2y_n - (y_{n-1} + y_{n+1})]. \end{aligned}$$

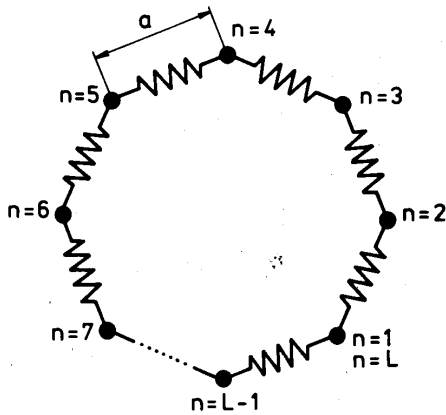
Pohybová rovnice n -tého oscilátoru, za předpokladu, že na něj působí pouze síly od sousedních částic (oscilátorů) je

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -k[2y_n - (y_{n-1} + y_{n+1})]. \quad (23.41)$$

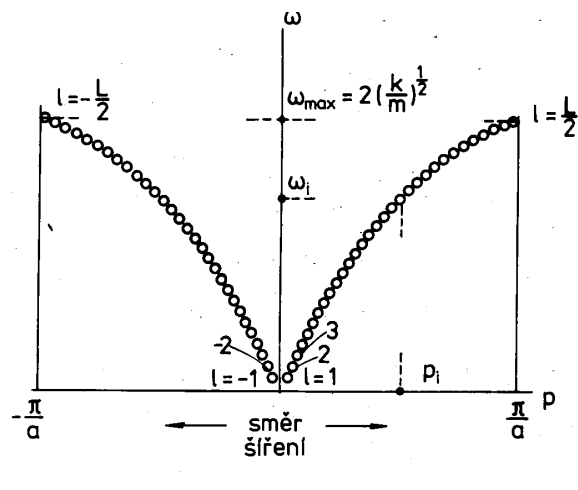
Obdobných rovnic můžeme napsat tolik, kolik je harmonických oscilátorů. Řešení systému všech těchto rovnic budeme hledat ve tvaru

$$(y_n)_p = A e^{-j(\omega t \pm pna)} + B e^{+j(\omega t \pm pna)}, \quad (23.42)$$

kde $j = (-1)^{1/2}$, na je souřadnice n -tého oscilátoru a p je zatím neurčitý parametr, jehož hodnota vyplyne z hraničních podmínek. Připomeňme si, že podobně jako v případě střídavých proudů i zde budou mít význam jen reálné části této komplexní výchylky.



Obr. 23.13 K odvození Bornovy-Kármánovy podmínky



Obr. 23.14 Dovolené úhlové kmitočty lineárního řetězce

Konstanty A a B jsou určeny počátečními podmínkami. Neznámou je zatím i úhlový kmitočet $(\omega)_p$, kde p vyjadřuje parametr. K nalezení možných hodnot úhlových kmitočtů vezměme pro jednoduchost jen prvou část funkce (23.42) (uvážení druhé části dá shodný výsledek) a prozatím diskutujeme jen řešení se znaménkem $-$, tj.

$$(y_n)_p = A e^{-j(\omega t - pna)},$$

(řešení se znaménkem $+$ uvážíme na konci tohoto článku), a dosadíme je do rovnice (23.41). Uvážíme přitom platnost rovnice

$$\begin{aligned} & y_{n-1} + y_{n+1} = \\ & = A e^{-j\omega t} [e^{jp(n-1)a} + e^{jp(n+1)a}] = \\ & = A e^{-j(\omega t - pna)} (e^{jpa} + e^{-jpa}) = \\ & = y_n (e^{jpa} + e^{-jpa}). \end{aligned}$$

Tak dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} -m\omega^2 y_n &= -k [2y_n - y_n (e^{jpa} + e^{-jpa})] = \\ &= ky_n (e^{jpa/2} - e^{-jpa/2})^2 = \\ &= -4ky_n \sin^2\left(\frac{pa}{2}\right), \end{aligned}$$

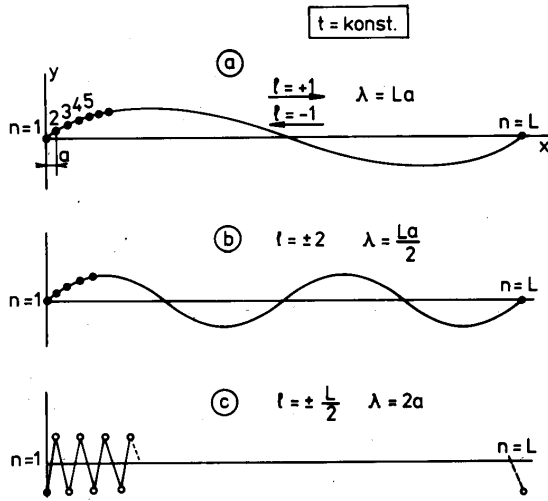
(23.43)

z které vyplývá disperzní vztah (23.39), který jsme měli nalézt. Jednotlivé dovolené hodnoty úhlového kmitočtu jsou proto určeny vztahem

$$\omega = 2 \frac{k}{m} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{pa}{2}\right).$$

(23.44)

Parametr p , jak vidíme, souvisí s počtem oscilátorů. Při velkém počtu oscilátorů můžeme bez újmy na obecnosti výsledků předpokládat, že celý lineární



Obr. 23.15 Okamžité výchylky lineárního řetězce pro tři kmitavé stavy charakterizované parametrem l

$$e^{-j\omega t} = e^{-j(\omega t - pLa)}, \quad \text{to je rovnice} \quad e^{jpLa} = \cos pLa + j \sin pLa = 1,$$

kteřá má řešení $pLa = 2l\pi$, kde $l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm L/2$ je celé číslo (řešení $l=0$ neboli $p=0$ nedává fyzikální smysl, protože předpokládá $\omega=0$).

Pro neznámý parametr p tak dostaneme vyjádření uvedené ve tvrzení 23.15. Dovolené hodnoty úhlových kmitočtů určených vztahem (23.44) tvoří tedy tzv. diskrétní spektrum

$$(\omega)_l = 2 \left(\frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{\pi}{L} l \right),$$

$$l = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{L}{2}.$$

(23.45)

Každé dvojici čísel $\pm l$ tedy odpovídá jedna hodnota úhlového kmitočtu $(\omega)_l$. Dovolené úhlové kmitočty jsou určené jednotlivými body na grafu zobrazujícím disperzní závislost (obr. 23.14). Hodnota $+l$ ($p > 0$) odpovídá řešení (23.42) se znaménkem \ominus a fyzikálně znamená šíření pohybu podél lineárního řetězce ve směru od oscilátoru $n=0$ k $n=L$. Hodnota $-l$ ($p < 0$) pak odpovídá řešení (23.42) se znaménkem \oplus a představuje pohyb v opačném směru. Maximální hodnota čísla l_{\max} , udávající počet možných stavů, vyplývá z maximální hodnoty

řetězce je stočený do prstence tak, že prvý a poslední oscilátor se ztotožní (obr. 23.13). Potom je logické požadovat splnění podmínky

$$y(0) = y(La),$$

kde L je součet oscilátorů. Takto formulovaná okrajová podmínka se nazývá Bornova-Karmárova podmínka. Ze tvaru funkce (23.42) potom vyplývá, že musí platit rovnice

argumentu funkce $\sin l\pi/L$, pro který je splněno $\sin(l_{\max}\pi/L)=1$, což je hodnota $l_{\max}\pi/L=\pi/2$, neboli $l_{\max}=L/2$. Uvážíme-li, že disperzní závislost tvoří dvě větve pro $p>0$ a $p<0$, z nichž každá má $L/2$ stavů, je tedy celkový počet možných stavů skutečně L , jak je vyjádřeno ve tvrzení 23.16.

Na obr. 23.15 je vyznačena závislost okamžitých výchylek $(y_n)_l$ jednotlivých oscilátorů pro kmity lineárního řetězce, charakterizovaná

$$l = \pm 1; l = \pm 2 \quad a \quad l = \pm \frac{L}{2}.$$

BORN Max, 1882-1970, teoretický fyzik německého původu, od r. 1933 do r. 1954 působil v Anglii. Jeho obsažné vědecké dílo zahrnuje práce z dynamiky krystalové mřížky, teorie struktury atomů, teorie relativity a zejména kvantové fyziky. Za podstatný podíl na vybudování kvantové teorie s přihlédnutím zejména k statistické interpretaci vlnové funkce dostal v r. 1954 Nobelovu cenu (současně s W.W.G. Bethem).

KÁRMÁN Theodore, 1881-1963, americký aeronauti maďarského původu. Jeden z nejvýznamnějších raketových odborníků. Zabýval se zejména mechanikou a teorií letu. Spolu s M.Bornem formulovali známé Bornovy-Kármárovy podmínky.