20 ELEKTRICKÝ PROUD

Ohmův zákon
Rovnice kontinuity elektrického proudu, Maxwellův relaxační čas
Elektromotorické napětí
Kirchhoffovy zákony
Práce a výkon elektrického proudu

Vodiče jsme předběžně definovali jako látky v kterých existují volné pohyblivé náboje. Obecně mohou existovat volné kladné i záporné elektrické náboje. Jestliže bychom vytvořili ve vodičích elektrické pole, uvedli bychom volné náboje do pohybu - kladné ve směru intenzity elektrického pole, záporné proti ní. Takový pohyb elektrického náboje vytváří elektrický proud. Nevyhnutelnou podmínkou vzniku elektrického proudu je tedy přítomnost volných nosičů náboje v látkách. Ukazuje se však, že sám pojem "volný " nosič náboje je velmi složitý. V přírodě se totiž nenacházejí látky, ve kterých by všechny nosiče náboje byly dokonale volné, resp. dokonale nepohyblivé. V reálných látkách se "pohyblivost" nosičů náboje mění spojitě od takřka zcela volných až po téměř úplně vázané.

Řešení problému elektrického proudu v látkách vyžaduje proto detailní znalost vlastností látek, jejich složení, strukturu, obsah příměsí, defektů atd. Tyto otázky však budeme moci probrat až po absolvování základů z atomové a kvantové fyziky. Zdálo by se proto logické odložit celou problematiku elektrického proudu až na závěr. Nemůžeme však takto postupovat, protože s pohybem elektrického náboje je spojen jev, kterým se musíme v této části zabývat - vznik magnetického pole.

Proto si v této kapitole zformujeme obecné zákonitosti s formálním přihlédnutím na mikrofyzikální podstatu jevů. Zavedeme si několik nových pojmů a fenomenologických materiálových konstant nevyhnutelných pro pochopení problémů magnetického a elektromagnetického pole. Souvislost těchto konstant s mikrofyzikálními parametry budeme hledat až v kapitole pojednávající o elektrických vlastnostech reálných látek.

20.1 Ohmův zákon

Základním zákonem elektrokinetiky, který dává do souvislosti příčinu (elektrické pole) a následek (elektrický proud) je Ohmův zákon (věty 20.2 a 20.4). Pro jeho formulaci potřebujeme zavést veličinu proudové hustoty a proudu (věty 20.1 a 20.3).

20.1
Vektor proudové hustoty i definujeme vztahem

$$\boldsymbol{i} = \rho_+ \boldsymbol{v}_+ + \rho_- \boldsymbol{v}_- , \qquad (20.1)$$

kde $\rho_+ > 0$ a $\rho_- < 0$ jsou hustoty volného kladného a záporného náboje a v_+ a v_- jejich přenosové

Matematické vyjádření vektoru proudové hustoty (20.2), jehož číselná hodnota má mít smysl uvedený v definici 20.1, vyplývá z obr. 20.1. Za jednotku času projde zvoleným průřezem S všechen kladný náboj v objemu o základně S a výšce v_+ (tj. $\rho_+ S v_+$) a všechen záporný náboj přítomný v objemu Sv_- (tj. $\rho_- S v_-$), kde ρ_+ a ρ_- jsou objemové rychlosti. Číselně udává tento vektor množství záporného náboje, které projde jednotkovým průřezem vodiče za jednotku času.

20.2

Elementární Ohmův zákon (Ohmův zákon v diferenciálním tvaru): vektor proudové hustoty i je přímo úměrný vektoru intenzity elektrického pole

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{20.2}$$

kde σ je konstanta úměrnosti, která se nazývá elektrická vodivost.

20.3

Elektrický proud I je množství náboje, které proteče celým průřezem vodiče za jednotku času. Je určen vztahem

$$I = \int i \,.\, d\boldsymbol{S} = \frac{dQ}{dt}. \tag{20.3}$$

Jednotka elektrického proudu je $[I]=A$ (ampér) (definice bude uvedena v článku 21.2). Vodičem prochází ustálený elektrický proud o velikosti $1A$ jestliže jeho průřezem prochází náboj $1C$ za čas $1s$.

20.4

Ohmův zákon (v integrálním tvaru): Elektrický proud I je přímo úměrný napětí

$$I = \frac{U}{R}. \tag{20.4}$$

Konstanta úměrnosti R se nazývá elektrický odpor. Jeho jednotka je $[R]=[U]/[I]=V/A=\Omega$. Odpor 1Ω má takový vodič, kterým protéká při napětí $1V$ proud $1A$.

20.5

Elektrický odpor závisí na geometrických rozměrech vodiče podle vztahu

hustoty příslušných nábojů, takže celkem projde jednotkovým průřezem za jednotku času náboj $Q_+=(\rho_+ S v_+)/S$ a $Q_-=(\rho_- S v_-)/S$. Jako vektor směrujeme proudovou hustotu i ve směru toku kladného náboje, takže můžeme psát

$$\boldsymbol{i} = \rho_+ v_+ \nu + (-\rho_-) v(-\nu) = \rho_+ \boldsymbol{v}_+ + \rho \boldsymbol{v}, \tag{20.6}$$

což je vztah (20.1).

Bezprostředně měřitelnou veličinou je elektrický proud I, kterou zavádí věta 20.3. Proud je kladný, jestliže vektor plošky $d\boldsymbol{S}$ orientujeme tak, aby úhel sevřený vektory $\boldsymbol{i}$ a $d\boldsymbol{S}$ byl ostrý. Je-li tento úhel tupý, je proud záporný. Vidíme, že znaménko proudu, na rozdíl od proudové hustoty, můžeme určit až po tzv. orientaci okruhu, tj. volbou směru oběhu.

Ze zkušenosti víme, že konstantní elektrické pole způsobuje konstantní elektrický proud. Z rovnice (20.6) bychom však lehce mohli dojít k mylnému závěru, že tomu tak není. Uvažujeme např. jen kladné náboje s nábojem q, na které působí elektrické pole konstantní intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$. Na každý takový (volný) náboj působí síla

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E},$$

která mu uděluje zrychlení

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{m}} = \frac{q\boldsymbol{E}}{m}.$$

Podle toho se při působení konstantního elektrického pole kladné náboje pohybují rovnoměrně zrychleným pohybem s rychlostí

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_o} + \frac{q\boldsymbol{E}}{m}t,$$

$$R = \int \frac{ds}{\sigma \Delta S} = \int \rho^* \frac{ds}{\Delta S}, \qquad (20.5)$$

kde $\rho^*=1/\sigma$ je měrný elektrický odpor, ds element délky vodiče a ΔS jeho průřez. Podle této definice je jednotka měrného elektrického odporu $[\rho^*]=[R][S]/[s]$=Q m a jeho měrné elektrické vodivosti $[\sigma]=1/[\rho^*]=\Omega^{-1}m^{-1}=S\,m^{-1}$.

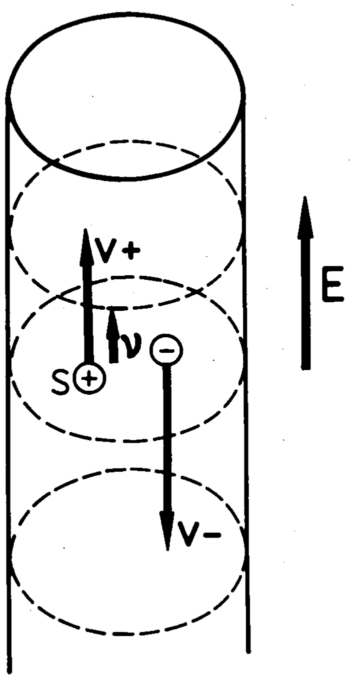
20.6

Výsledný odpor seriově spojených rezistorů je rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých rezistorů

$$R = \sum_i R_i .$$

Převrácená hodnota výsledného odporu paralelně spojených rezistorů je rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých rezistorů.

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} .$$



Obr. 20.1 K zavedení vektoru proudové hustoty

kde $\boldsymbol{v}_0$ je počáteční rychlost. (Nosiče náboje nejsou nikdy v klidu ani bez působení elektrického pole). Jestliže tento výsledek dosadíme do rovnice (20.6) dostaneme pro proudovou hustotu vyjádření

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_o + \frac{q\boldsymbol{E}}{m} t,$$

kde $\boldsymbol{i}_0$ odpovídá počátečním rychlostem nosičů náboje. Tento výsledek je zřejmě nesprávný, protože podle něho by měl látkou protékat elektrický proud i bez působení elektrického pole ($\boldsymbol{i}_0$) a ve vnějším elektrickém poli konstantní intenzity by měla proudová hustota s časem lineárně narůstat. Prvý paradox lehce odstraníme, jestliže si uvědomíme, že střední hodnota všech počátečních rychlostí je v rovnovážném stavu nulová (proto $i_0=0$). Druhý paradox existuje v uvedené podobě jen v přechodové fázi, dokud se poměry po vytvoření elektrického pole neustálí. V reálných prostředích působí totiž proti zvětšování rychlosti částic reálné síly související např. s odporem prostředí (v kapalných vodičích) a s tzv. rozptylem náboje na tepelných kmitech a jiných poruchách krystalické mřížky vodičů. Jelikož odpor prostředí je v prvém přiblížení úměrný rychlosti, můžeme v ustáleném stavu napsat rovnici pro střední rychlost

$$q\boldsymbol{E} = k\ \boldsymbol{v}_s,$$

kde k je konstanta úměrnosti. V pevných látkách můžeme zavést určitou fenomenologickou konstantu charakterizující střední dobu volného pohybu nabitých částic. Označujeme ji znakem τ. Střední rychlost nosičů náboje můžeme potom vyjádřit vztahem

$$v_s = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{q\boldsymbol{E}}{m}\tau\right) = \frac{q\boldsymbol{E}}{2m}\tau .$$

V obou případech platí tedy přímá úměrnost mezi střední rychlostí $\boldsymbol{v}_S$ a intenzitou elektrického pole $\boldsymbol{E}$.

Můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{v}_s = b\boldsymbol{E},$$

kde konstanta úměrnosti b mající význam střední rychlosti částic v elektrickém poli o jednotkové intenzitě elektrického pole se nazývá pohyblivost. Mívá pro různé látky hodnoty od 10^{-10} do 10 $m^2\ V^{-1}\ s^{-1}$. Jestliže dosadíme poslední rovnici rozšířenou pro oba typy nosičů do rovnice (20.6) dostaneme vztah

$$\boldsymbol{i} = (\rho_+ b_+ + \rho_- b_-)\boldsymbol{E}.$$

Jestliže ještě dále výraz v závorce označíme písmenem σ, tj.

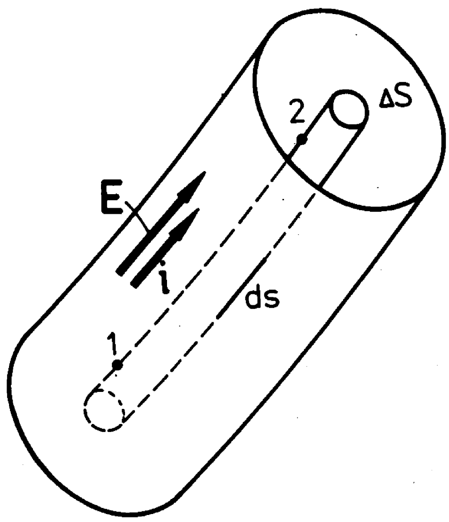
$$\sigma = \rho_+ b_+ + \rho_- b_-$$

a nazveme ho měrnou elektrickou vodivostí, dostaneme vztah (20.2) a uvedenou formulaci Ohmova zákona v diferenciálním tvaru.

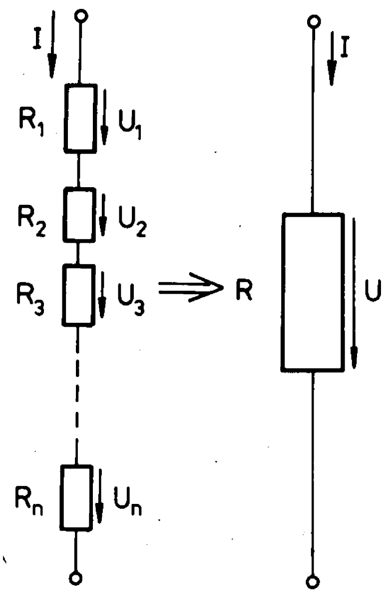
Měrná elektrická vodivost látek σ se mění ve velmi širokém intervalu v soustavě *SI* od hodnot řádu $10^{-14}\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$ do hodnot $10^8\ \Omega^{-1} m^{-1}$ pro velmi dobré vodiče (kovy). Převrácená hodnota měrné elektrické vodivosti 1/σ se nazývá měrný elektrický odpor a zde ho označíme ρ^*.

Elektrické proudy, pro které platí vztah (20.1) se nazývají driftové - na rozdíl od elektrických proudů, které mohou mít i jinou příčinu jako je elektrické pole (např. difúzi).

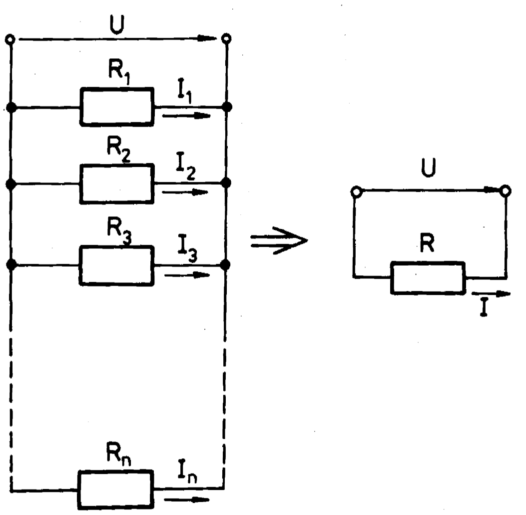
Pomocí elementárního Ohmova zákona a definice 20.3 můžeme najít souvislost mezi napětím připojený vodič a intenzitou protékajícího elektrického proudu.



Obr. 20.2 K výpočtu odporu vodiče



Obr. 20.3 Seriové řazení rezistorů



Obr. 20.4 Paralelní řazení rezistorů

Uvažujme ovelmi úzké "proudové trubici" průřezu ΔS (obr. 20.2). Napětí U připojené na konce trubice, neboli rozdíl potenciálů na jejích koncích je

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} = \int_1^2 Eds,$$

protože směr intenzity elektrického pole je totožný se směrem diferenciálu $\boldsymbol{dr}$. Jestliže intenzitu elektrického pole vyjádříme pomocí proudové hustoty ($E=i/\sigma$) a uvážíme, že proud je v našem případě $I=i.\Delta S$, dostaneme vztah

$$U = \int \frac{i}{\sigma} ds = \int \frac{I}{\sigma \Delta S} ds = I \int \frac{ds}{\sigma \Delta S} = I \int \frac{\rho^* ds}{\Delta S}. \qquad (20.7)$$

Jestliže podle definice 20.5 označíme $R=\int ds/\sigma\Delta S$ a tuto novou veličinu nazveme elektrický odpor, můžeme poslední rovnici napsat ve stručném tvaru (20.4), která se nazývá Ohmův zákon.

Je-li vodič homogenní a má-li všude stejný průřez S a jeho celková délka je ℓ, můžeme jeho odpor vyjádřit vztahem

$$R = \int \frac{\rho^* ds}{S} = \frac{\rho^*}{S} \int ds = \frac{\rho^* l}{S}. \qquad (20.8)$$

Podle toho má elektrický vodič tím větší odpor, čím je delší a čím má menší průřez. Zavádí se ještě další veličina, která je rovna převrácené hodnotě odporu $G=1/R$, nazývá se vodivost a její jednotka je $[G]=1/[G]=\Omega^{-1}=S$ (siemens).

Měrný elektrický odpor (měrná elektrická vodivost) mnohých látek závisí na velkém počtu vnějších vlivů (teplotě, tlaku, elektrickém a magnetickém poli, ozáření apod.), což umožňuje převést měření těchto veličin na měření změn intenzity protékajícího elektrického proudu.

Věty 20.6 vyplývají ze zákona o skládání napětí při spojení rezistorů do serie (obr. 20.3) platí $U=\Sigma U_i$ resp. ze zákona o skládání elektrických proudů při paralelně spojených rezistorech $I=\Sigma I_i$ (obr. 20.4).

OHM George Simon (óm), 1787-1854, německý fyzik. Zpočátku vyučoval na gymnáziu, později se stal profesorem na technice, resp. na univerzitě. Byl velmi schopným experimentátorem a svoje největší objevy vykonal ještě po dobu svého působení na gymnáziu. Výsledkem jeho pokusů je i objev závislosti proudu na napětí zdroje a odporu vodiče, stejně jako i vyjádření odporu pomocí materiálovách konstant a rozměrů vodiče. Právě proto byla na jeho počest pojmenována jednotka odporu jeho jménem.

20.2 Rovnice kontinuity elektrického proudu, Maxwellův relaxační čas

Proudění elektrického náboje ve vodičích může být stacionární (ustálené), nebo nestacionární. Nestacionární proudění vede k tomu, že množství volného elektrického náboje ve vodiči se s časem mění. To platí i naopak: jestliže se z nějaké příčiny objeví ve vodiči nadbytečný volný elektrický náboj, vyvolá nestacionární proudění, které vede k jeho zániku. Z praktického hlediska jsou důležité zejména dvě otázky: jaká je souvislost hustoty proudu s volným nábojem ve vodiči při nestacionárním proudění a jak rychle zanikne ve vodiči nahromaděný volný elektrický náboj (např. ozářením, injekcí apod.). Prvou otázku řeší tzv. zákon kontinuity elektrického proudu (věta 20.7), mírou času zániku nahromaděného náboje je tzv. Maxwellova relaxační konstanta. (Věta 20.8).

20.7
Zákon kontinuity elektrického proudu je

$$div\ \boldsymbol{i} + \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0 . \qquad (20.9)$$

Při ustáleném proudění je proto vždy splněná rovnice

$$div\ \boldsymbol{i} = 0 . \qquad (20.10)$$

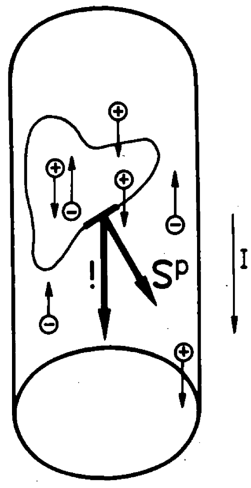
20.8
Objemová hustota volného nadbytečného náboje ρ se ve vodiči "rozplývá" podle zákona

$$\rho(t) = \rho_o\ e^{-\frac{t}{\tau_M}} , \qquad (20.11)$$

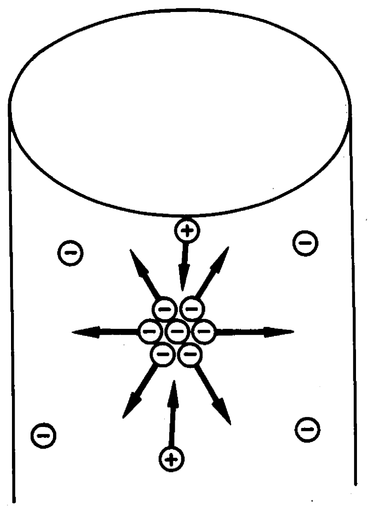
Zákon kontinuity elektrického proudu je vlastně přímým důsledkem zákona o zachování elektrického náboje, tj. zákona o jeho nezničitelnosti. Jestliže si uvnitř vodiče, kterým protéká elektrický proud, zvolíme uzavřenou plochu (obr. 20.5), integrál $\oint \boldsymbol{i}.d\boldsymbol{S}$ značí zřejmě celkové nmožství náboje, které vyteklo zevnitř plochy za jednotku času. Tutéž změnu náboje však můžeme vyjádřit i jako úbytek celkového náboje uzavřeného plochou S-dQ/dt, takže platí rovnice

$$\int \boldsymbol{i}.d\boldsymbol{S} = \frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \rho\, .d\tau = \\ = -\int \frac{\delta \rho}{\delta t} d\tau .$$

Podle Gaussovy - Ostrogradského věty (7.7) vyjádříme plošný integrál pomocí objemového, čímž dostaneme rovnici kde $\tau_M=\epsilon_o\epsilon_r/\sigma$ je tzv. Maxwellův relaxační čas.



Obr. 20.5 K odvození rovnice kontinuity elektrického proudu



Obr. 20.6 Kompenzace a rozplývání nadbytečného náboje ve vodiči

$$\int div\ \boldsymbol{i} d\tau = - \int \frac{\delta \rho}{\delta t} d\tau ,$$

z které již bezprostředně vyplývá věta 20.7.

Jestliže se z nějaké příčiny vytvoří ve vodiči volný a nadbytečný elektrický náboj (např. připojením velkého elektrického pole, injekcí z kontaktu apod.), nezůstane tento náboj v něm trvale nahromaděný. Po zániku vnějšího generujícího činitele začne jeho objemová hustota ρ klesat, a to buď proto, že se jednotlivé náboje vlastními odpudivými silami rozptýlí, nebo proto, že do místa nahromadění náboje jednoho znaménka, který jej vykompenzuje (obr. 20.6). Tyto procesy popisují rovnice (20.2), (20.9) a (19.70).

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$div\ \boldsymbol{i} = - \frac{\delta \rho}{\delta t}$$

$$div\ \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o \epsilon_r} .$$

Jestliže předpokládáme, že nahromaděným volným nábojem se prakticky nezmění elektrická vodivost látky, tj. $\sigma(t)=\sigma(t=0)$, dostaneme úpravou dvou z uvedených rovnic

$$div\ \boldsymbol{i} = \sigma\ \ div\ \boldsymbol{E} = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_o \epsilon_r} .$$

Podle třetí rovnice se však tato veličina rovná výrazu - $\delta\rho/\delta t$, takže je správná i rovnice

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma}{\epsilon_o \epsilon_r} \rho = 0 . \qquad (20.12)$$

Jestliže označíme $\tau_M=\epsilon_o\epsilon_r/\sigma$, můžeme její řešení při podmínce $\rho(t=0)=\rho_o$ napsat ve tvaru

$$\rho = \rho_o\, e^{-\frac{t}{\tau_M}},$$

což je funkce (20.11). Prostorový nadbytečný náboj ve vodiči klesá podle exponenciální funkce. Za čas $t=\tau_M$ klesne jeho objemová hustota e-kráte, tj. 2,7 kráte, za čas rovnající se několika násobné hodnotě τ_M klesne tato hustota prakticky na nulu. Maxwellův relaxační čas je proto mírou návratu vodiče do rovnovážného stavu, tj. do stavu bez nadbytečného prostorového náboje. Ve vodičích je pro tento čas od 10^{-15} do 10^{-13} s, v polovodičích od 10^{-13} do 10^{-10} s a v nevodičích to mohou být i hodiny. Tyto jevy jsou velmi důležité při práci se střídavými, tj. časově proměnnými proudy.

20.3 Elektromotorické napětí

Zdrojem elektrického pole je elektrický náboj. Jestliže spojíme pomocí vodiče dvě oblasti s volným elektrickým nábojem, např. desky nabitého kondenzátoru (obr. 20.7), začne protékat vodičem elektrický proud, čímž se elektrický náboj vyrovnává a elektrické pole postupně zaniká. Chceme-li tedy, aby elektrický proud protékal obvodem trvale, musíme elektrický náboj na koncích vodiče obnovovat. Tuto funkci vykonávají tzv. zdroje elektromotorického napětí.

Uzavřený elektrický okruh obsahuje tedy i zdroj elektromotorického napětí. Ohmův zákon napsaný ve tvaru (20.2) k této skutečnosti nepřihlíží, proto ho musíme v tomto směru doplnit (věta 20.10). Další definice a poznatky obsahují věty 20.9 a 20.11 až 20.14.

20.9
Intenzita cizích sil $\boldsymbol{E}_c$ je definována poměrem výslednice "cizích"sil působících na bodový náboj a tohoto náboje. Je tedy definována stejně jako intenzita elektrického pole (def. 19.4), ale původ příslušné působící síly je jiný.

20.10
Elementární Ohmův zákon (Ohmův zákon v diferenciálním tvaru) za přítomnosti elektrických i cizích sil má tvar

$$\boldsymbol{i} = \sigma\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_c)\,. \qquad (20.13)$$

20.11
Elektromotorické napětí ϵ zdroje elektromotorické síly definujeme vztahem

Princip činnosti zdroje elektromotorického (dále jen elmot.) napětí je velmi jednoduchý. Z každého prostředí (pevného, kapalného i plynného) můžeme vyrobit zdroj elmot. napětí, jestliže najdeme způsob, jak trvale separovat (oddělit) od sebe kladný a záporný náboj. Síly, které tuto funkci vykonávají, nazýváme **cizí** síly. Mohou to být:

1. Síly vyplývající z kinetiky atomů a molekul (tzv. difúzní síly). Následkem rozdílů v koncentraci částic určitého druhu, resp. v důsledku jejich rozdílné rychlosti podmíněné nestejnou teplotou, se částice přesouvají z míst s větší koncentrací do míst s menší koncentrací, resp. z míst, v kterých mají vyšší rychlosti do míst s menší rychlostí. Jsou-li tyto částice elekricky nabité, vzniká na jedné straně volný kladný a na druhé straně volný záporný náboj. Vznikající elektrické pole má takový směr, že pohyb částic ve směru

$$\epsilon = \oint \boldsymbol{E}_c . d\boldsymbol{r} . \qquad (20.14)$$

Integrační cestu volíme tak, aby bylo $\epsilon > 0$. Tím vlastně přiřadíme elektromotorickému napětí určitý směr.

20.12

Ohmův zákon pro uzavřený obvod: Elektrický proud protékající uzavřeným obvodem se zdrojem elektromotorického napětí je

$$I = \frac{\epsilon}{R_v + R_i}, \qquad (20.15)$$

kde R_V je odpor vnějšího obvodu (spotřebiče) a R_i je vnitřní odpor zdroje.

20.13

Svorkové napětí U zdroje elektromotorického napětí je rozdíl potenciálů na svorkách zdroje udávající napětí ve vnějším obvodu. Jestliže obvodem neprotéká elektrický proud, platí (obr. 2.8)

$$U = \underset{(b)}{\int_1^2} \boldsymbol{E} . d\boldsymbol{r} = \underset{(a)}{\int_2^1} \boldsymbol{E}_c . d\boldsymbol{r} = \epsilon . \qquad (20.16)$$

Jestliže obvodem protéká elektrický proud, platí

$$U = \underset{(b)}{\int_1^2} \boldsymbol{E} . d\boldsymbol{r} = \epsilon - R_i I . \qquad (20.17)$$

20.14

Ohmův zákon pro nehomogenní vodič: Napětí U_{AB} mezi dvěma libovolně vybranými body proudovodiče splňuje rovnici

"gradientu" koncentrace, resp. rychlosti, zpomaluje, v opačném směru pohyb podporuje, takže po určitém čase vznikne ustálený stav se stálým vnitřním elektrickým polem. Na tomto principu jsou založeny tzv. koncentrační galvanické články, termočlánky apod.

2. Chemické síly. Jestliže ponoříme kovovou elektrodu (např. *Zn*) do elektricky vodivého roztoku (např. H_2SO_4), který nazýváme elektrolyt, může dojít k chemické reakci. V uvedeném případě kladně nabité atomy Zn přecházejí do elektrolytu a chemicky s ním reagují, čímž se elektrolyt nabíjí kladně a kov záporně. Tento princip využívají tzv. chemické gylvanické články.

3. Elektrické a magnetické síly. Cizí silou mohou být dokonce i samotné elektrické, příp. magnetické pole. V některých vhodných látkách vzniká difúzní tzv. vnitřní elektrické pole, které od sebe separuje volné kladné a záporné náboje, vznikající v párech např. po osvětlení. Tak pracují rozličné fotovoltaické články, sluneční baterie apod. Úlohu separátoru elektrického náboje může vykonávat i magnetické pole. Využívají ho tzv. fotomagnetické články, nebo pro větší výkony tzv. magnetohydrodynamické generátory.

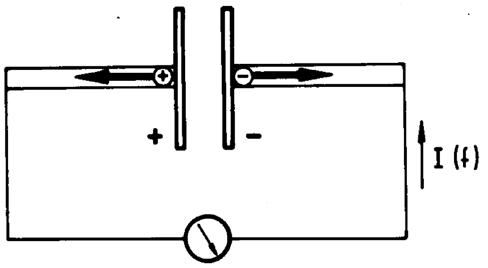
4. Mechanické síly. Za přítomnosti magnetického pole mohou i mechanické síly vykonávat funkci cizích sil. Na tomto principu pracují nejznámější zdroje elektrického pole - elektromagnetické generátory.

Rozšířená definice Ohmova zákona (20.13) vyplývá z definice 20.1. V uvedené definici se nijak nespecifikuje síla, která uvádí náboj do pohybu. Obecně to může být síla elektrická i tzv. cizí síla, proto ve vztahu který vyjadřuje vektor proudové hustoty **I** musí vystupovat vektorový součet příslušných intenzit elektrického pole $\boldsymbol{E}$ a cizích sil $\boldsymbol{E}_c$.

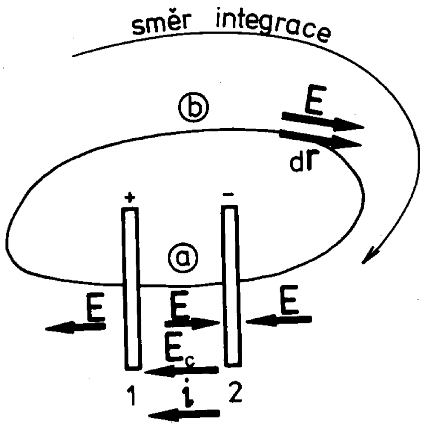
Připojme nyní ke zdroji elmot. síly s elmot.

$$U_{AB} = V_A - V_B = \sum_j R_j I_j - \sum_i \epsilon_i \qquad (20.18)$$

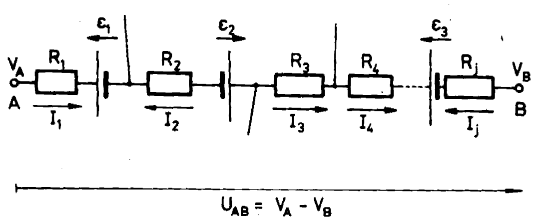
kde R_j jsou odpory zařazené mezi body 1 a 2, I_j proudy a ϵ_i elektromotorická napětí.



Obr. 20.7 K objasnění pojmu zdroje elektromotorického napětí



Obr. 20.8 K odvození Ohmova zákona pro uzavřený obvod



Obr. 20.9 K odvození Ohmova zákona pro nehomogenní vodič

napětím vnější elektrický obvod. Pak platí rovnice pro každý bod obvodu

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_c = \frac{\boldsymbol{i}}{\sigma}. \qquad (20.19)$$

Proveďme integraci této rovnice podél křivky, která prochází celým uzavřeným obvodem (obr. 20.8) to je zdrojem (a) i spotřebičem (b). Vzhledem k tomu, že elektrické pole je konzervativního charakteru, platí i nyní $\oint \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r}=0$. Křivkový integrál $\int E_c.d\boldsymbol{r}$ je různý od nuly jen v oblasti zdroje (jinde cizí síly nepůsobí), takže můžeme psát $\oint E_c.d\boldsymbol{r}=\int \boldsymbol{E}_c.d\boldsymbol{r}$. Integrací rovnice (20.19) tedy získáme

$$\underset{(a)}{\int_2^1 \boldsymbol{E}_c.d\boldsymbol{r}} = \underset{(a)}{\int_2^1 \frac{\boldsymbol{i}}{\sigma}.d\boldsymbol{r}} + \underset{(b)}{\int_1^2 \frac{\boldsymbol{i}}{\sigma}.d} \qquad (20.20)$$

Integrál na levé straně této rovnice definuje elmot. napětí ϵ, prvý integrál na pravé straně můžeme vyjádřit podle vztahu (20.7) R_iI, druhý integrál na pravé straně součinem $R_V I$, kde R_i a R_V jsou vnitřní odpor zdroje a vnějšího obvodu
(zátěže, spotřebiče). Rovnici (20.20) tedy můžeme napsat i ve tvaru

$$\epsilon = R_V I + R_i I, \qquad (20.21)$$

z které můžeme přímo jednoduše získat vztah (20.15).

Svorkové napětí U zdroje elmot. napětí mezi body 1 a 2 (obr. 20.8) získáme podle obecné definice 20.13. Platí

$$U = \underset{(b)}{\int_1^2 \boldsymbol{E} . d\boldsymbol{r}} = \underset{(a)}{\int_2^1 \boldsymbol{E} . d\boldsymbol{r}} = \underset{(a)}{\int_1^2 \frac{\boldsymbol{i}}{\sigma} . d\boldsymbol{r}} - \underset{(a)}{\int_1^2 \boldsymbol{E_c} . d\boldsymbol{r}} \tag{20.22}$$

což s využitím definic (20.14) a (20.7) a s uvážením směrů vektorů ***i***, $\boldsymbol{E}_c$ a ***dr*** (obr. 20.8) dá konečný tvar

$$U = -R_i \; I \; + \; \epsilon \, . \tag{20.23}$$

výrazu (20.23) vyplývají již obě rovnice (20.16) a (20.17).

Ohmův zákon pro nahomogenní vodič odvodíme obdobně. Pro napětí mezi libovolnými body A a B obecného proudovodiče můžeme psát (obr. 20.9)

$$U_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E} . d\boldsymbol{r} = \int_A^B \frac{\boldsymbol{i}}{\sigma} . d\boldsymbol{r} + \int_A^B \boldsymbol{E_c} . d\boldsymbol{r} .$$

Prvý integrál představuje podle (20.7) a (20.8) součet členů $\Sigma_j R_j I_j$, kde proudy, směřující od boduA do bodu B se berou s kladným znaménkem a proudyopačné se záporným. Druhý integrál představuje podle definice (20.14) součet elektromotorických napětí $\Sigma_i \epsilon_i$ mezi body A a B, přičemž elektromotorická napětí směřující od bodu A k B se berou s kladným znaménkem a napětí opačná se záporným. Výsledek můžeme zapsat ve tvaru (20.18).

20.4 Kirchhoffovy zákony

Ohmův zákon (20.15) vyjadřuje vztah mezi proudem a napětím v jednom uzavřeném elektrickém obvodu. V praxi se však často prolíná více elektrických obvodů, takže v jednotlivých úsecích mohou téci různé proudy. Jejich výpočet nám umožňují dva Kirchhoffovy zákony (věty 20.16 a 20.17). Při jejich formulaci potřebujeme zavést pojem uzlu (věta 20.15).

20.15
Uzel je takové místo v elektrickém obvodu, v kterém se spojují nejméně tři proudovodiče (obr. 20.10).

Již při zavádění této veličiny jsme upozornili, že znaménko proudu vyplývá z orientace elementu dS. Jestliže vektor proudové hustoty i a vektor plošky dS svírají ostrý úhel, je intenzita

20.16

I. Kirchhoffův zákon: V ustáleném stavu se algebraický součet proudů v uzlu rovná nule

$$\sum_i I_i = 0. \qquad (20.24)$$

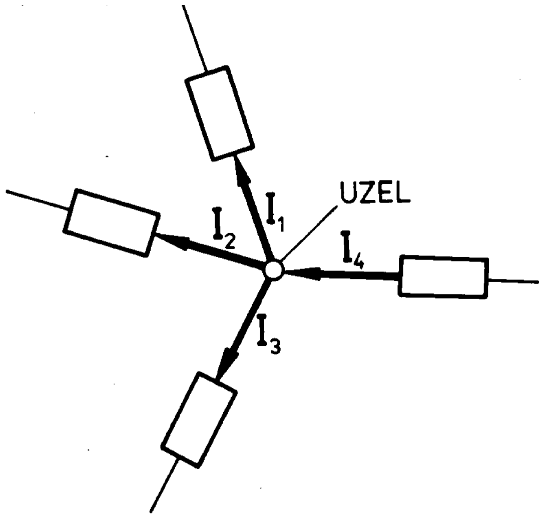
Jednotlivé proudy je nutno brát s příslušným znaménkem, např. kladným, jestliže do uzlu vtékají a záporným, jestliže z něho vytékají, resp. naopak.

20.17

II. Kirchhoffův zákon: Součet elektromotorických napětí ve zvoleném okruhu je roven součtu napětí ve všech rezistorech okruhu.

$$\sum_i \epsilon_i = \sum_j R_j I_j. \qquad (20.25)$$

Elektrický proud I je definován vztahem (20.3).



Obr. 20.10 K I. Kirchhoffovu zákonu

proudu kladná veličina, jestliže je tento úhel tupý, je záporná. Z těchto příčin dříve než začneme počítat s proudy v jednotlivých větvích složeného elektrického obvodu, musíme si jednotlivé okruhy (smyčky) orientovat, neboli zvolit směr oběhu (obr. 20.11). Ve složeném obvodu s více zdroji elektromotorického napětí předem neznáme směr vektoru hustoty proudu, proto nemůžeme (ani při zvolené orientaci smyček) stanovit správné znaménko proudových intenzit. Zvolíme si je proto libovolně a s takto zvolenými znaménky provedeme výpočet. Jestliže nám při řešení vyjde kladné znaménko, bude to znamenat, že jsme směr proudu zvolili správně, jestliže nám vyjde znaménko záporné, bude to znamenat, že ve skutečném obvodě má intenzita proudu opačný směr.

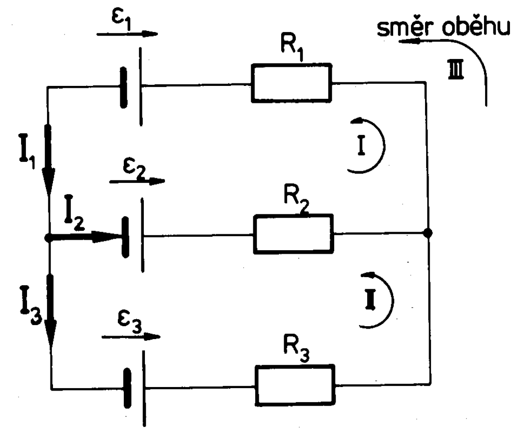
Prvý Kirchhoffův zákon vyjadřuje v podstatě zákon zachování náboje. Jestliže by neplatil, v uzlu by se hromadil elektrický náboj, což by mělo za následek porušení základního předpokladu o ustálených proudech. Pro obvod na obr. 20.11 můžeme na základě I. Kirchhoffova zákona napsat dvě rovnocenné rovnice

$$\begin{aligned} & I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ & \textit{nebo} \\ & -I_1 + I_2 + I_3 = 0. \end{aligned} \qquad (20.26)$$

Vidíme, že rovnice jsou závislé. Jednu z nich můžeme dostat z druhé vynásobením - 1. Pro řešení můžeme proto použít jen jednu z nich. Chybějící dvě rovnice (neznámé jsou tři proudy) nám poskytne II. Kirchhoffův zákon.

Platnost II. Kirchhoffova zákona dokážeme jednoduše z rovnice (20.18), jestliže ztotožníme při integraci bod A s bodem B, a tak vlastně rozšíříme integraci podél celé uzavřené smyčky. Získáme tak $U_{AA} = \oint E.dr = \Sigma_j R_j I_j - \Sigma_i \epsilon_i = 0$ a tím okamžitě i tvar II. Kirchhoffova zákona (20.25).

Jako příklad si ukažme sestavení rovnic pro obvod na obr. 20.11. Na základě II. Kirchhoffova zákona můžeme psát



Obr. 20.11 Příklad složitějšího elektrického obvodu

KIRCHHOFF Gustav Robert, 1824-1887. Své zákony o elektrické síti uveřejnil ještě jako student fyziky. Později se zabýval zejména tepelným zářením a zformuloval základní zákon pro rovnovážné tepelné vyzařování. Spolu s R.W.Bunsenem vypracoval metodu spektrální analýzy, která se dnes používá téměř ve všech oblastech vědy a techniky. Její pomocí vysvětlil existenci do té doby záhadných tmavých čar ve slunečním spektru (Fraunhofferovy čáry), objevil cezium a rubidium.

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = R_2 I_2 + R_1 I_1$$
$$\epsilon_3 - \epsilon_2 = R_3 I_3 - R_2 I_2$$
$$\epsilon_3 - \epsilon_1 = R_3 I_3 + R_1 I_1 .$$

Opět ukážeme, že jen dvě z těchto rovnic jsou nezávislé. Například poslední rovnice vyplývá z předcházejících dvou jejich součtem. Jako výsledek tedy získáme dvě rovnice, které spolu s jednou z rovnic (20.26) poskytují tři nezávislé rovnice potřebné k výpočtu tří neznámých proudů.

Jestliže složený obvod sestává z velkého počtu smyček, poskytují Kirchhoffovy zákony (n+k) rovnic, kde n je počet uzlů a k je počet všech uzavřených smyček. Z nich je však jen m<(n+k) nezávislých, kde m je počet neznámých proudů. Nalezení těchto m nezávislých rovnic je obecně dosti složitý problém, proto se v praxi používají určité metody, pomocí kterých můžeme přímo napsat jen potřebné nezávislé rovnice (Maxwellova metoda obvodových proudů, metoda uzlových napětí a jiné).

20.5 Práce a výkon elektrického proudu

Práci a výkon jsme definovali již v mechanice (věty 11.14 a 11.16). Tyto definice zůstávají v platnosti i pro elektrické pole, jen je nutné v nich vystupující veličiny (sílu a dráhu) nahradit veličinami používanými v nauce o elektřině (napětím, proudem apod.) (věty 20.18 až 20.20).

20.18
Práce elektrického proudu je určena vztahem

Uvažujme o elementu náboje dq, který prošel celým uzavřeným obvodem (obr. 20.12). Síla, která na něho obecně působí, je $d\boldsymbol{F}=dq\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_c)$, takže integrál

$$A = \int_{t_1}^{t_2} UI\ dt. \qquad (20.27)$$

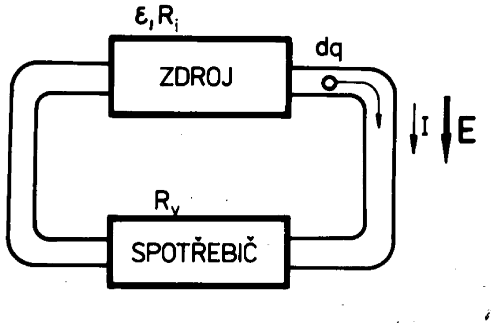
20.19

Výkon elektrického proudu je definován vztahem

$$P = UI. \qquad (20.28)$$

20.20

Maximální výkon se odevzdá spotřebiči tehdy, jestliže jeho elektrický odpor je roven vnitřnímu odporu zdroje elektromotorického napětí



Obr. 20.12 K zavedení práce a výkonu el. proudu

$$R_v = R_i. \qquad (20.29)$$

$$dA = \oint dq(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_c).\boldsymbol{dr} =$$
$$= \oint dq \frac{\boldsymbol{i}}{\sigma}.\boldsymbol{dr}$$

má význam práce, kterou vykonaly při přemístění náboje dq podél celého obvodu síly elektrického pole i cizí síly. Vždy však platí rovnice (konzervativnost elektrického pole) $\oint \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dr}=0$, proto je správná i rovnice

$$dA = \oint dq \boldsymbol{E}_c.\boldsymbol{dr} = \oint dq\, \rho^* \boldsymbol{i}.\boldsymbol{dr}. \qquad (20.30)$$

Vidíme, že práce elektrického proudu v uzavřeném obvodě souvisí jen s cizími silami. Jestliže však při úpravě pravé strany rovnice (20.30) použijeme podobný postup jako při úpravě rovnice (20.20) dostaneme výsledek

$$dA = dq(R_v + R_i)I,$$

kde R_V je odpor vnějšího obvodu (zahrnujícího odpor zátěže, spotřebiče) a R_i je vnitřní odpor zdroje. Podle své definice je proud definován $i=dq/dt$, takže platí $dq=Idt$, proto celková práce vykonaná za časový interval $t \in (t_1, t_2)$ je určena vztahem

$$A = \int_{t_1}^{t_2} R_v I^2\ dt + \int_{t_1}^{t_2} R_i I^2\ dt.$$

Práce odevzdaná do vnějšího obvodu (zátěži) je proto

$$A_v = \int_{t_1}^{t_2} R_v I^2 \, dt = \int_{t_1}^{t_2} UI \, dt,$$

což je vztah (20.27). Z něj bezprostředně vyplývá i vztah pro výkon (20.28).

Práce elektrického proudu vykonaná zdrojem elektromotorického napětí se tedy rozdělí na část připadající na zdroj a část odevzdanou do zátěže. Jelikož je z praktického hlediska zajímavá otázka kolik užitečné práce, tj. práce odevzdané do zátěže se vykoná, najděme podmínku, při které bude tato práce maximální. Výpočet můžeme jednoduše uskutečnit, jestliže si všimneme výkonu obvodu. Podle vztahů (20.15) a (20.31) je výkon odevzdaný do zátěže určený vztahem

$$P = R_v I^2 = R_v \frac{\epsilon^2}{(r_v + R_i)^2}.$$

Podmínka maxima má proto tvar

$$\frac{dP}{dR_v} = \epsilon^2 \left[\frac{1}{(R_v + R_i)^2} - \frac{2R_v}{(R_v + R_i)^3} \right] = 0.$$

Řešením této rovnice dostaneme podmínku optimálního přizpůsobení vnějšího odporu zátěže, která má tvar $R_v = R_i$. Tím jsme dokázali větu 20.20.

Výraz $\int_{t1}^{t2} RI^2$ dt představuje práci, která se mění na teplo nazývané Jouleovo teplo.