19 ELEKTROSTATICKÉ POLE

Coulombův zákon
Gaussova věta a její důsledky
Elektrický dipól
Elektrostatické pole soustavy dipólů
Elektrostatické pole v reálných látkových prostředcích, Poissonova a Laplaceova rovnice
Zobrazování elektrostatického pole, podmínky na rozhraní
Kapacita
Energie elektrostatického pole

Druhou nejvýznamější vlastností základních částic je jejich elektrický náboj. S ním spojené silové účinky se projevují prostřednictvím elektrického pole. Aby nedošlo k nedorozumění, je třeba si ihned na začátku uvědomit, že elektrický náboj je jen jednou z vlastností objektivní reality. Nemá proto smysl otázka, co je to elektrický náboj, jak vypadá apodob. Situaci bychom mohli přirovnat např. k napnuté a nenapnuté pružině. Je-li pružina natažená, vyznačuje se určitou novou vlastností - napjatostí. Právě tak elektricky nabité těleso se liší od nenabitého tím, že je v něm jakýsi druh "napětí". Na rozdíl od hmotnosti a gravitačních účinků jsou v tomto případě dva možné stavy, kterým odpovídají co do velikosti stejné ale opačně orientované silové účinky (podobně se i silové účinky pružiny mohou projevit tahem nebo tlakem). Ve fyzice se vžilo nazývat dva uvedené stavy podmiňující orientované silové účinky kladný a záporný náboj. Podle konvence se kladné znaménko přisuzuje "elektřině", která vzniká ve skle při tření amalgamovou koží a záporné znaménko "elektřině", která vzniká v ebonitu při jeho tření srstí.

Jelikož v přírodě nacházíme i látkové objekty, které nejeví elektrické účinky, domnívali bychom se, že elektrický náboj nemusí být nevyhnutelnou vlastností látky. Skutečnost je však pravděpodobně taková, že všechny látky jsou vždy elektricky nabité, avšak mohou mít stejné množství kladné a záporné "elektřiny", takže jejich silové účinky se vzájemně vyruší. I tzv. neutron, který je neutrální elementární částicí se při svém rozpadu mění na proton s kladným nábojem a elektron se záporným elementárním nábojem. Můžeme proto tvrdit, že hmotnost i elektrický náboj jsou neoddělitelnými vlastnostmi fyzikální reality. Stejné je to i s gravitačním a elektrickým polem, avšak silové účinky odpovídající těmto polím jsou velmi rozdílné. Uvidíme, že v mikrosvětě, to je v oblasti vzájemných interakcí elementárních částic, atomů a molekul, daleko převyšují elektrické síly (asi 10^{40}krát), zatímco v makrosvětě naopak převládají gravitační síly. Pro strukturu mikrosvěta jsou tedy charakteristické elektrické síly pro strukturu makrosvěta gravitační síly.

Prostor silových účinků v okolí elektrických nábojů budeme nazývat elektrickým polem, budou-li navíc tyto náboje v klidu, elektrostatickým polem.

19.1 Coulombův zákon

Podobně jako kvantitativní vyjádření vlastností gravitačního pole vyplývají z Newtonova gravitačního zákona, vlastnosti elektrického pole vyplývají z podobného tzv. Coulombova zákona (věta 19.3). Jeho formulace však vyžaduje znalost kvantitativního hodnocení elektrického náboje. V soustavě SI vyplývá jednotka pro měření elektrického náboje z jednotky proudu a času (věta 19.1).

19.1
Jednotkou elektrického náboje Q v soustavě SI je C (coulomb). Je to takové množství elektrického náboje Q, které projde průřezem vodiče za čas t roven 1 s, je-li ustálený proud I protékající vodičem roven 1A (ampér). Jelikož platí $Q=It$, je rovněž splněno

$$[Q] = [I]\,[t] = A\,s = C.$$

19.2
Bodový elektrický náboj zavádíme jako náboj soustředěný na těleso, jehož geometrické rozměry můžeme v dané situaci zanedbat.

19.3
<u>Coulombův zákon</u>: bodový náboj q_1 působí na bodový náboj q_2 elektrostatickou silou, která je přímo úměrná součinu obou nábojů a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzájemné vzdálenosti

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\,\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}}. \qquad (19.1)$$

Konstanta úměrnosti se píše z důvodů, které uvedeme později ve tvaru $1/4\,\pi\,\epsilon_o$, kde $\epsilon_o=8{,}854.10^{-12}\ C^2s^2m^{-3}kg^{-1}$ ($= F\ m^{-1}$), se nazývá permitivitou vakua.

Obr. 19.1 Silové působení elektrických nábojů

Základní částice našeho světa (elektrony a protony) mají elektrický náboj roven $q=e=1{,}602.10^{-19}C$, takže při jejich hmotnostech $m_e \doteq 10^{-30}\ kg$ a $m_p \doteq 10^{-27}$ kg je poměr elektrostatické síly, gravitační síly mezi nimi roven

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o \varkappa\, m_p m_e} \doteq 10^{40}$$

Elektrický náboj vesmírných těles (planet, Slunce apod.) je řádově několik jednotek až desítek coulombů, takže poměr přitažlivé síly gravitační a elektrické mezi Zemí a Sluncem (při $m_z \doteq 10^{24}\ kg$, $m_s \doteq 10^{30}\ kg$) je naopak

$$\frac{F_e}{F_g} \doteq 10^{-40},$$

čímž jsme dokázali tvrzení uvedené v úvodu k elektrickému poli.

Coulombův zákon se většinou chápe jako úplně obecný a bez omezení platný zákon. Lehce však můžeme dokázat, že uvedená formulace nemůže platit bez omezení. Kdyby tomu tak bylo, potom bychom neuměli vysvětlit existenci elektricky nabitých částic jako soudržných objektů. Představme si, že např. elektron rozdělíme na dvě pomyslné části. Jelikož obě jsou elektricky souhlasně nabité, působí na sebe odpudivou silou, která vzhledem k tomu, že $r \to 0$ by musela být nekonečně velká. Žádná jiná přitažlivá síla by tedy nemohla zabezpečit soudržnost elektricky nabité částice. Musíme proto předpokládat, že pro $r \to 0$ se vztah pro elektrickou sílu musí určitým způsobem modifikovat.

Druhá "nedokonalost" Coulombova zákona spočívá v tom, že nerespektuje konečnou rychlost šíření silového působení. Kdyby např. ve dvou různých místech došlo k rozpadu neutronů ne elektricky nabité složky (protony a elektrony), vzniklo by podle toho okamžité silové působení

COULOMB Charles August (kulom), 1736-1806, francouzský fyzik a vojenský inženýr, který se zpočátku zabýval zejména teorií a konstrukcí jednoduchých strojů. Vypracoval metodu měření malých sil pomocí torzních vah a jejím využitím odvodil vztah pro sílu mezi dvěma elektrickými náboji (prvý kvantitativní zákon elektřiny). Poukázal rovněž na formální analogii mezi jím objeveným zákonem a Newtonovým gravitačním zákonem. Na jeho počest je pojmenována jeho jménem jednotka elektrického náboje.

mezi těmito složkami, bez ohledu na jejich vzdálenost. Elektrické působení se přenáší konečnou rychlostí (rychlostí světla), proto v případě velmi rychlých polohových změn nábojů je nutno příslušné vztahy pozměnit.

Třetí zvláštností Coulombova zákona je, že vyjadřuje schopnost elektricky nabitých těles působit na sebe nenulovými silami při každé konečné vzdálenosti mezi nimi (až při $r \to \infty$ by mělo $F \to 0$). Vyskytují se názory, podle kterých elektrické působení má konečný dosah, tj. existuje určitá charakteristická vzdálenost, za kterou již silové působení prudce klesá k nule. Tento názor je zatím nutno chápat jen jako hypotézu.

VOLTA Alessandro, 1745-1827, italský fyzik a filozof. Spolu s L. Galvanim experimentoval s živými organismy, které produkují elektrický proud. Zkonstruoval r. 1799 prvý chemický zdroj elektromotorického napětí - Voltův sloup. Na základě pokusů s tímto zdrojem vynalezl řadu přístrojů - elektroskop, elektrometr, kondenzátor, popsal projekt telegrafu. V r. 1776 objevil metan. Na jeho počest je pojmenována jeho jménem jednotka potenciálu a napětí.

19.2 Intenzita a potenciál elektrostatického pole

Podobně jako v případě gravitačních sil zavádíme i pro elektrické síly představu silového pole a pro jeho charakteristiku intenzitu a potenciál elektrostatického pole (věty 19.4 až 19.8).

19.4

Intenzita elektrostatického pole $\boldsymbol{E}$ je definována jako podíl síly elektrického pole $\boldsymbol{F}$, která v daném místě působí na bodový náboj q a tohoto náboje

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}\,. \qquad (19.2)$$

Jednotka intenzity elektrostatického pole je

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}\,.$$

19.5

Intenzita elektrostatického pole $\boldsymbol{E}$ bodového náboje q ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ je rovna

Vztah (19.3) vyplývá bezprostředně z Coulombova zákona (19.1) a z definice (19.2). Náboj q', který použijeme na měření intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ musí být dostatečně malý, aby svým polem nedeformoval pole, které chceme měřit. Je-li elektrické pole vytvořeno systémem bodových nábojů s náboji q_i, resp. tělesem konečných rozměrů se spojitě rozloženým nábojem s plošnou hustotou náboje $\sigma = dq/dS$, $[\sigma] = Cm^{-2}$ nebo s objemovou hustotou náboje $\rho = dq/d\tau$, $[\rho] = Cm^{-3}$, je intenzita elektrostatického pole vyjádřena vztahy (19.4) a (19.5).

Z podobných důvodů, které jsme uvedli v gravitačním poli se i v případě elektrického pole počítá zpravidla nejdříve potenciál, protože je to skalární veličina a intenzita elektrického pole se vypočítá na základě věty 19.9.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{q}{r^3}\ \boldsymbol{r}, \qquad (19.3)$$

intenzita elektrostatického pole soustavy bodových nábojů je rovna

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\ \sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\ \boldsymbol{r_i} \qquad (19.4)$$

a nabitého tělesa

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_Q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dq =$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S \frac{\boldsymbol{r}\sigma}{r^3}\,dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_\tau \frac{\boldsymbol{r}\rho}{r^3}\,d\tau; \qquad (19.5)$$

kde $\sigma=dq/dS$ je plošná hustota náboje a $\rho=dq/d\tau$ je objemová hustota náboje.

19.6
Potenciál elektrostatického pole V v daném místě je definován jako podíl potenciální elektrostatické energie W_{pe} bodového náboje q' v tomto místě a jeho náboje

$$V = \frac{W_{pe}}{q'}. \qquad (19.6)$$

Jednotka potenciálu $[V]=J\,C^{-1}=V$ (volt). Potenciál elektrostatického pole zpravidla vztahujeme k hladině v nekonečnu, proto je potenciál v nějakém místě rovněž definován prací vykonanou silou elektrostatického pole při přenesení libovolného náboje q' z tohoto místa do nekonečna, dělenou tímto nábojem q'

$$V = \frac{1}{q'}\int_r^\infty \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_r^\infty \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} \qquad (19.7)$$

Potenciál elektrostatického pole určíme na základě definice 19.6 při použití vztahu (11.26) pro potenciální energii, do které dosadíme za sílu ***F*** z Coulombova zákona (19.1). Pro přírůstek dostaneme potenciální elektrostatické energie dvou bodových nábojů q a q' mezi dvěma body 1 a 2

$$W_{pe2} - W_{pe1} = -\int_{r_1}^{r} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,qq'\int_{r_1}^{r_2}\frac{\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{r}}{r^3} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,qq'.\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{qq'}{r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{qq'}{r_1} \qquad (19.13)$$

Podle definičního vztahu (19.13) můžeme tedy stanovit přírůstek potenciální energie dvou bodových nábojů mezi dvěma libovolnými body v prostoru. Potenciální energie v daném bodě je definována až na konstantu, kterou můžeme volit. Podobně jako v gravitačním poli volme konstantu tak, aby hodnota potenciální energie elektrostatické v bodě nekonečně vzdáleném se blížila k nule ($r_2\to\infty$, $W_{pe}\to 0$). Potenciální elektrostatická energie dvou bodových nábojů v daném místě pak je

$$W_{pe}(\boldsymbol{r}) = \int_r^\infty \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{qq'}{r}. \qquad (19.14)$$

Potenciál elektrostatického pole jsme definovali podle (19.6) $V=W_{pe}/q'$, proto podle (19.14) je potenciál elektrostatického pole bodového náboje q roven

Podle této definice má elektrostatické pole v daném místě potenciál roven 1 V, jestliže elektrostatická síla vykoná při přemístění kladného náboje 1 *C* z daného místa do nekonečna práci 1 *J*, nebo jestliže vnější síla vykoná při přemístění stejného náboje z nekonečna do daného místa práci 1 *J*.

19.7

Potenciál elektrostatického pole *V* bodového náboje systému bodových nábojů a spojitě nabitého tělesa je roven

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{r}, \qquad (19.8)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \qquad (19.9)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int \frac{dq}{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S \frac{\sigma}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_\tau \frac{\rho}{r}\,d\tau, \qquad (19.10)$$

kde označení veličin je stejné jako ve větě 19.5.

19.8

Napětí *U* elektrického pole mezi dvěma body 1 a 2 je definováno rozdílem potenciálů v těchto dvou bodech

$$U = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r}. \qquad (19.11)$$

Jednotkou napětí je $[U]=V$.

$$V = \frac{W_{pe}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{r},$$

což je vztah (19.8). Rozšíření tohoto výsledku na systém bodových nábojů je v důsledku aditivnosti potenciálu (skalární veličina!) jednoduché (vztah /19.9/) a rozšíření na nabité těleso konečných rozměrů můžeme provést stejně jako v případě výpočtu těžiště těles (13.4).

Vztah (19.12) byl zaveden obecně již ve větě 11.22. Je zajímavé si povšimnout jednoho z důsledků tohoto vztahu. Při práci s elektrostatickým polem často zavádíme dva pojmy, které nám názorně popisují vlastnosti pole: jsou to siločáry a ekvipotenciální hladiny elektrostatického pole. Siločára je orientovaná čára, jejíž tečna určuje v každém bodě směr intenzity elektrického pole. Ekvipotenciální hladina je pak geometrické místo bodů v prostoru, které mají konstantní potenciál $V(x, y, z)=V_o$. Vzhledem k obecné platnosti vztahu (19.12) je vždy splněna podmínka, že siločáry protínají ekvipotenciální hladiny kolmo (podrobnější popis bude proveden v článku 19.7). Na obr. 19.2 jsou znázorněny pro ilustraci siločáry a ekvipotenciální hladiny (pouze v rovině x, y) dvojice opačných, ale stejně velkých nábojů.

Výsledek (19.13) vyjadřuje, že při přemísťování náboje *q*' v elektrostatickém poli práce nezávisí na tvaru dráhy náboje *q*'. Podle definice 11.19 je tedy elektrostatické pole potenciálové, a proto platí pro křivkový integrál po určené křivce intenzity elektrostatického pole

$$\oint_l \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} = 0.$$

Při volném pohybu nabitých těles v elektrostatickém poli tedy musí být splněna podmínka, že součet kinetické a potenciální elektrostatické energie je konstantní

19.9
Intenzita elektrického pole ***E*** a potenciál elektrického pole *V* závisí navzájem vztahem

$$\boldsymbol{E} = -grad\ V. \qquad (19.12)$$

$$W_{k1} + W_{pe1} = W_{k2} + W_{pe2} = k \qquad (19.15)$$

Vztah (19.15) představuje zákon zachování energie při pohybu nabitých těles nebo částic v elektrostatickém poli. Tohoto zákona lze s výhodou užít při studiu pohybu nabitých částic v urychlovačích a elektronkách.

Obr. 19.2 Siločáry (nepřerušované čáry) a ekvipotenciální hladiny (přerušované čáry) elektrostatického pole (na příkladě pole dvojice

19.3 Gaussova věta a její důsledky

Gaussova věta (věta 19.10) umožňuje lehce získat velmi užitečné informace o elektrostatickém poli v okolí nabitých těles, zejména kulových a rovinných, ale i vně i uvnitř nabitých vodičů (věty 19.12 až 19.14).

19.10
Gaussova věta pro elektrostatické pole zní: tok intenzity elektrostatického pole ***E*** z objemu *V* ohraničeného uzavřenou plochou *S* je roven náboji *q* obsaženému v tomto objemu dělenému permitivitou vakua. Formulace Gaussovy věty v integrálním tvaru tedy je

$$\oint_S \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\epsilon_o}, \qquad (19.16)$$

Na základě analogie se "zřídly" (např. zdrojem světla) definujeme pojem toku intenzity elektrostatického pole. Představíme-li si na okamžik, že elektrická pole trvale "vytéká" ze zdroje na všechny strany s intenzitou ***E*** (obr. 19.3), (která v tomto přeneseném smyslu má význam "množství" elektrického pole, které vyteče jednotkovým průřezem kolmým na směr šíření za jednotku času) můžeme tvrdit, že ploškou dS_2 jen $d\Phi_{e1}=E_1 dS_1$ (pole), avšak ploškou dS_2 jen $d\Phi_{e2}=$

Formulace Gaussovy věty v diferenciálním tvaru je

$$div\ \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}, \qquad (19.17)$$

kde ρ je objemová hustota elektrického náboje.

19.11
Elektrostatické pole v okolí homogenně nabité koule je stejné jaké by v tomto prostoru vytvořil bodový náboj stejné velikosti umístěný ve středu této koule.

19.12
Intenzita elektrostatického pole v okolí homogenně nabité desky nekonečných rozměrů je

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{\epsilon_o}, \qquad (19.18)$$

kde $\sigma = dq/dS$ je plošná hustota náboje. Mezi dvěma homogenně nabitými deskami nekonečných rozměrů nesoucími náboje opačných znamének se stejnými plošnými hustotami náboje ve všech bodech konstantní elektrostatické pole intenzity

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_o}, \qquad (19.19)$$

19.13
Chování nabitých vodičů a vodičů v elektrostatickém poli: Celkový elektrický náboj nabitého vodiče v ustáleném stavu je rozložen na povrchu vodiče. Uvnitř vodiče je ve všech bodech intenzita elektrostatického pole rovna nule, takže potenciál uvnitř vodiče má konstantní hodnotu.

$E_2 dS_2 \cos\alpha = E_2 . dS_2$ (obr. 19.3). Obecně tedy plošným elementem dS vyteče $d\Phi_e = E.dS$, takže tok celou uzavřenou plochou S je

$$\Phi_e = \oint_s \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S}.$$

Jestliže předpokládáme, že elektrický náboj uvnitř uzavřené plochy je bodový, můžeme intenzitu E vyjádřit vztahem (19.3) a psát
přičemž jsme uvážili definici prostorového úhlu d $\Omega = dS_0/r^2$ a skutečnost, že celý prostorový úhel $\Omega = 4\pi$

$$\oint_s \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \oint_s \frac{\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{S}}{r^3} =$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_o} . \oint_s \frac{dS\ \cos\alpha}{r^2} =$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \oint \frac{dS_o}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \oint_s d\Omega =$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\, 4\pi = \frac{q}{\epsilon_o},$$

sr (steradián).

Je vidět, že tok intenzity elektrostatického pole nezávisí na poloze náboje uvnitř uzavřené plochy, proto v případě přítomnosti více bodových nábojů $q = \Sigma_i q_i$, případně i spojitě rozložených nábojů $q = \int dq$, zůstane výsledek (19.16) v platnosti. Tím jsme jednak dokázali platnost Gaussovy věty 19.10, jednak jsme zdůvodnili, že je skutečně "racionální" psát konstantu úměrnosti v Coulombově zákoně v podobě $1/4\,\pi\epsilon_o$. V Gaussově větě (a v celé řadě dalších vztahů) se pak nepohodlné číslo 4π neobjeví.

Gaussovu větu pro vakuum a pro spojitě rozložený elektrický náboj můžeme formulovat i v jednodušším, tak zvaném diferenciálním tvaru. Jestliže plošný integrál $\oint_s E.dS$ přepíšeme na objemový pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty integrálního počtu (7.7) a celkový náboj q

Povrch vodiče tvoří ekvipotenciální plochu. Intenzita elektrostatického pole ve všech bodech povrchu vodiče je tedy kolmá na jeho povrch.

19.14
<u>Coulumbova věta</u>: v těsné blízkosti nabitého vodiče je intenzita elektrostatického pole určena vztahem

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_o} ,$$

kde σ je plošná hustota náboje v daném místě povrchu vodiče.

Obr. 19.3 Ke Gaussově větě: Znázornění výtoku intenzity elektrostatického pole

vyjádříme-li náboj pomocí integrálu $q=\int\rho\, d\tau$, kde ρ je objemová hustota elektrického náboje a $d\tau$ je objemový element, dostaneme rovnici

$$\int_\tau div\ \boldsymbol{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_o} \int_\tau \rho\, d\tau \qquad (19.20)$$

ze které vyplývá rovnice

$$div\ \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} .$$

K důkazu věty 19.11 obklopme nabitou kouli poloměru r uzavřenou plochou stejného poloměru r (obr. 19.4). Podle Gaussovy věty se musí tok touto uzavřenou plochou rovnat q/ϵ_o, avšak vzhledem k tomu, že v každém bodě této plochy je intenzita elektrostatického pole stejná, můžeme psát

$$\oint_S \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} = E \oint_S dS = 4\pi r^2 E$$

takže platí pro intenzitu elektrostatického pole na povrchu koule

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r^2} .$$

Stejně bychom vyjádřili i intenzitu elektrostatického pole bodového náboje stejné velikosti umístěného ve středu koule, takže věta 19.11 skutečně platí.

Větu 19.12 dokážeme rovněž jednoduše tak, že nekonečnou rovinnou plochu obklopíme uzavřenou plochou. Jelikož tato plocha může mít libovolný tvar, můžeme pro náš účel zvolit válec skládající se ze dvou, s uvedenou plochou rovnoběžných ploch S_1 a S_2 a pláště S_3 (obr. 19.5). Tok pláštěm válce nemusíme uvažovat, protože elektrický tok touto plochou je roven nule ($\boldsymbol{E} \perp$

Obr. 19.4 K odvození intenzity elektrostatického pole nabité koule

Obr. 19.5 K odvození intenzity elektrostatického pole desky

$d\boldsymbol{S}_3$). Celkový tok vyznačenými plochami velikosti $S_1=S_2=S$ je proto

$$\oint_S \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S}=2ES=\frac{q}{\epsilon_o}=\frac{\sigma S}{\epsilon_o},$$

kde σ je plošná hustota náboje. Z této rovnice bezprostředně vyplývá vztah (19.18). Vztah (19.19) získáme ze vztahu (19.18) sečteme-li elektrická pole obou desek.

Tvrzení 19.13 vyplývá z faktu, že uvnitř ideálního vodiče, kam jsme přenesli volný elektrický náboj, musí být jeho objemová hustota v ustáleném stavu nulová, protože tento náboj se následkem odpudivých sil odvede k povrchu (obr. 19.6). Z toho, že alespoň jeden druh nosičů náboje je ve vodičích pohyblivý vyplývá, že v rovnováze je uvnitř vodiče zachovaná elektrická neutralita, tj. $\rho=0$, nepůsobí-li žádné vnější činitele, které by tento stav narušovaly. Z rovnice $\oint \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S}=0$ platné pak pro vnitřek vodiče vyplývá i rovnice $E=0$ a z rovnice $\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,V$ i tvrzení, že uvnitř vodiče je potenciál konstantní.

Uvedené konstatování má praktický význam v tom, že pro shromažďování elektrického náboje je zbytečné používat např. plné vodivé koule. Stačí jen tenký plech do tvaru koule zformovat. Uvnitř takové duté koule není elektrické pole (tzv. Faradyova klec) i přesto, že povrch vodiče může mít i velmi velký potenciál.

V okolí nabitého tělesa může být i velmi velké elektrostatické pole. Jeho intenzitu najdeme pomocí Gaussovy věty tak, že povrchový náboj umístěný na elementu plochy $dq=\sigma\, dS$, kde σ je plošná hustota náboje, obklopíme válcem s plochou dS a se zanedbatelně malou plochou pláště (obr. 19.7).

Obr. 19.6 Pohyb volných nosičů náboje uvnitř vodiče před a a po b ustavení rovnováhy (τ_M je Maxwellův relaxační čas)

Obr. 19.7 K odvození Coulombovy věty

Celkový tok válcem je tedy *EdS*, protože tok dovnitř vodivé koule je roven nule (*E*=0). Platí tedy podle Gaussovy věty rovnice

$$E\ dS = \frac{\sigma\, dS}{\epsilon_o}\,,$$

z které ihned vyplývá Coulombova věta 19.14.

Má-li vodič ostré hrany nebo rohy je v těchto místech velké elektrostatické pole, je-li takový vodič nabit elektrickým nábojem. Složky gradientu elektrostatického potenciálu mají v důsledku velkých změn křivosti povrchu těles v těchto místech velkou hodnotu, takže i složky vektoru intenzity elektrostatického pole, které jsou jimi určené, jsou velké. Může se to projevit tím, že velké elektrické pole v okolí hran a hrotů začne vytlačovat volný náboj z povrchu do okolí. Tento jev se nazývá "sršení" náboje, jde-li o únik náboje do atmosféry, nebo injekce náboje, jestliže náboj uniká do jiné látky, která je ve styku s hrotem.

GAUSS Karl Friederich, 1777-1855, vystudoval matematiku, fyziku a astronomii. Kromě mnoha původních úspěchů v matematice (kvadratický zákon reciprocity, teorie chyb, metoda nejmenších čtverců aj.) dosáhl stejně pozoruhodných výsledků i v mechanice, elektromagnetizmu (definoval jednotku elektrického náboje, jako prvý změřil intenzitu magnetického pole Země) a astronomii. Jeho práce z teorie polí se staly vzorem matematického řešení i dalších fyzikálních problémů. Spolu s W.Weberem je objevitelem telegrafu.

19.4 Elektrický dipól

Elektrické náboje (zejména v mikrosvětě) jsou velmi často rozložené tak, že vytvářejí dvojice velmi blízko sebe umístěných stejně velkých nábojů opačného znaménka. Takové soustavy n elektrické dipóly. Mají významnou úlohu při vytváření elektrických polí v reálných látkách, při vzniku chemických vazeb v látkách apod., proto je potřebné poznat blíže jejich vlastnosti (věty 19.15 až 19.18).

19.15

Elektrický moment elektrického dipólu p definujeme součinem kladného náboje dipólu q a polohového vektoru a kladného náboje vzhledem k zápornému náboji (obr. 19.8)

$$\boldsymbol{p} = q\,\boldsymbol{a} \qquad (19.21)$$

19.16

Potenciál V elektrického dipólu v bodě ***r*** je

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad (19.22)$$

19.17

Homogenní elektrické pole intenzity ***E*** působí na elektrický dipól v každém místě stejným momentem síly

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}\,x\,\boldsymbol{E}. \qquad (19.23)$$

V nehomogenním elektrickém poli je tento moment vyjádřen stejně, ale je funkcí polohy dipólu a kromě momentu ***M*** působí elektrické pole na dipól silou ***F***, jejíž velikost je

$$F = \boldsymbol{p}.grad\boldsymbol{E}. \qquad (19.24)$$

19.18

Potenciální energie elektrického dipólu v elektrickém poli intenzity ***E*** je

$$W_p = -\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E}. \qquad (19.25)$$

Potenciál elektrického pole v okolí dvojice nábojů (obr. 19.8) je podle definice 19.7

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\,d\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (19.26)$$

přičemž jsme uvážili, že náboje leží velmi blízko u sebe. Diferenciál d (1/r) můžeme upravit na tvar $d(1/r) = -dr/r^2$, přičemž

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)(dx\ \boldsymbol{i} + dy\ \boldsymbol{j} + dz\ \boldsymbol{k}) = grad\ r.d\boldsymbol{r}. \qquad (19.27)$$

Uvážíme-li dále, že v našem případě je $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}$ a použijeme-li vztah grad $r = \boldsymbol{r}/r$, dostaneme výsledek

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\boldsymbol{a}.\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_o r} \qquad (19.28)$$

což je vztah (19.22), který bylo nutno dokázat.

Intenzita elektrického pole v okolí dipólu je daná vztahem ***E***=-grad *V*.

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p\ \cos\ \nu}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})}{r^4}, \qquad (19.29)$$

Obr. 19.8 Elektrický dipól

$$E_\nu = \frac{-1}{r}\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p\ \sin\ \nu}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{|\,\boldsymbol{r}x\boldsymbol{p}|}{r^4}, \qquad (19.30)$$

$$E_\varphi = 0. \qquad (19.31)$$

Tyto tři skalární rovnice lze p

vektorové rovnice

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] \qquad (19.32)$$

Je-li elektrické pole homogenní, je výslednice sil působící na jednotlivé náboje dipólu však vytvářejí moment sil (obr. 19.9)

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{r}_+ x q\boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{r}_- x q\boldsymbol{E}) = = (\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-) x q\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} x \boldsymbol{E}, \qquad (19.33)$$

Obr. 19.9 Moment dvojice sil na dipól v homogenním elektrickém poli

čímž je dokázán vztah (19.23). Tento moment natáčí dipól tak, aby jeho osa ***a*** byla souhlasně rovnoběžná s intenzitou vnějšího elektrického pole ***E*** (obr. 19.10).

V nehomogenním elektrickém poli intenzita ***E*** působí na dipól síla $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}(r_+)-q\boldsymbol{E}(r_-$

Obr. 19.10 Orientace dipólu ve vnějším homogenním elektrickém poli

Obr. 19.11 K silovému působení mezi dvěma dipóly

)=$q d\boldsymbol{E}$, což ve skalárním tvaru můžeme psát jednoduše $F = qdE$. Jestliže diferenciál dE vyjádříme podobně jako v případě (19.27) dE=a.grad E získáme

$$F = q\ \boldsymbol{a}\ .\ grad\ E\ =\ \boldsymbol{p}\ .\ grad\ E, \tag{19.34}$$

což je vztah (19.24).

Dokažme ještě tvrzení věty 19.18. Potenciální energie dipólu W_p v elektrickém poli získáme na základě definice 19.6 jako práci sil elektrostatického pole potřebnou k přenesení obou nábojů q a -q z daných míst 1 a 2 do místa nulového potenciálu

$$\begin{aligned} W_p &= q V_1 - q V_2 = q(V_1 - V_2) = q \Delta V = \\ &= q \boldsymbol{a} . grad\ V = -\boldsymbol{p} . \boldsymbol{E} . \end{aligned} \tag{19.35}$$

Je zajímavé si všimnout vzájemné interakce dvou elektrických dipólů s elektrickými momenty $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{p}$’, které se pro jednoduchost orientujme paralerně (obr. 19.11). Elektrické pole dipólu je nehomogenní, takže výsledkem interakce v obecném případě bude síla a moment dvojice sil. Pro sílu, kterou působí dipól s momentem $\boldsymbol{p}$’ na dipól s momentem $\boldsymbol{p}$ ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ platí vztah (19.24) a pro její radiální složku F_r lze psát

$$F_r = \boldsymbol{p} . grad E_r = -\frac{3}{2\pi\epsilon_o} . \frac{(\boldsymbol{p} . \boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{r})}{r^6}, \tag{19.36}$$

kde jsme využili vztah pro E_r (19.29).

Vidíme, že výsledkem interakce dvou elektrických dipólů může být jak přitažlivá tak i odpudivá síla. Dipóly na sebe působí maximální přitažlivou silou při orientaci dipólů podle obr. 19.11. a její velikost je

$$F_{r\,\max} = \frac{3}{2\pi\epsilon_o}\,\frac{pp'}{r^4}\,. \tag{19.37}$$

Uvedeným způsobem je možno vysvětlit tzv. Van der Waalsovy síly mezi molekulami některých látek. Tato vazba je však v porovnání s vazbou mezi ointy opačné polarity podstatně slabší, protože přitažlivá síla mezi dvěma dipóly (19.37) klesá nejméně se čtvrtou mocninou vzdálenosti, zatímco v případě Coulombovy síly jen se druhou mocninou.

19.5 Elektrické pole soustavy dipólù

Elektrické dipóly mohou být soustředěny na ploše nebo v objemu těles. Jestliže je plocha nabita tak, že má na jedné straně spojitě rozložený kladný elektrický náboj a na druhé straně stejně velký záporný náboj (obr. 19.12) ve vzdálenosti a, hovoříme o tzv. elektrické dvojvrstvě. Pro výpočet elektrických polí soustav dipólů se zavádí pojem plošné a objemové hustoty elektrického momentu (věty 19.20 a 19.21).

19.19
Plošná hustota elektrického momentu $\boldsymbol{h}$ se zavádí vztahem

$$\boldsymbol{h} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dS} = \frac{dq\,\boldsymbol{a}}{dS} = \sigma\,\boldsymbol{a}\,, \tag{19.38}$$

kde $d\boldsymbol{p}$ je elektrický moment plochy dS a σ je plošná hustota náboje. Jednotka $[h]=Cm^{-1}$. Objemová hustota elektrického momentu P se zavádí vztahem

$$\boldsymbol{p} = \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\,, \tag{19.39}$$

kde $d\boldsymbol{p}$ je elektrický moment objemu $d\tau$. Jednotka $[P]=Cm^{-2}$.

19.20
Potenciál elektrického pole dvojvrstvy je

$$V = \pm\frac{\Omega h}{4\pi H_o}\,, \tag{19.40}$$

kde Ω je prostorový úhel, pod kterým vidíme dvojvrstvu z daného bodu.

Pomocí plošné hustoty elektrického momentu $\boldsymbol{h}$ můžeme vyjádřit elektrický moment $d\boldsymbol{p}$ plochy dS

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{h}dS = hd\boldsymbol{S}$$

kde plošku $d\boldsymbol{S}$ orientujeme ve shodě s vektorem $\boldsymbol{a}$ od záporného ke kladnému náboji (obr. 19.12). Potenciál v bodě A v okolí dvojvrstvy je potom (srovnej se vztahem /19.22/)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int\frac{\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{p}}{r^3} = \frac{h}{4\pi\epsilon_o}\,.\int_S\frac{\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{S}}{r^3}\,. \tag{19.42}$$

Poslední integrál je možno psát na základě definice prostorového úhlu

$$\int_S\frac{\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{S}}{r^3} = \int_S\frac{dS\,\cos\,\alpha}{r^2} = \int\frac{dS_o}{r^2} = \pm\,\Omega\,, \tag{19.43}$$

kde znaménko + je při orientaci bodu A na kladné straně dvojvrstvy a, - na záporné straně dvojvrstvy. Spojením (19.42) a (19.43) získáme výraz pro potenciál dvojvrstvy

19.21

Potenciál elektrického pole obecné soustavy dipólů je

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \frac{\boldsymbol{P}.d\boldsymbol{S}}{r} + \qquad (19.41)$$
$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_\tau \frac{-div\boldsymbol{P}}{r}\, d\tau\,,$$

kde ***P*** je objemová hustota elektrického momentu.

Obr. 19.12 K odvození elektrického pole dvojvrstvy

Obr. 19.13 K odvození změny potenciálu na dvojvrstvě

$$V = \pm \frac{\Omega h}{4\pi\epsilon_o}\,,$$

což je výraz (19.40). Je zajímavé si všimnout změny potenciálů při průchodu dvojvrstvou. Při průchodu dvojvrstvou se potenciál změní skokem z hodnoty $V_1 = \Omega\, h/4\,\pi\,\epsilon_o$ na hodnotu $V_2 = (\Omega + 4\,\pi)\, h/4\,\pi\,\epsilon_o$, protože prostorový úhel se změní o celou periodu 4π. Jestliže proto rozdělíme křivkový integrál (obr. 19.13) intenzity elektrického pole ***E*** po uzavřené křivce na část ležící mimo dvojvrstvu (1) a na část ve dvojvrstvě (2) bude

$$\oint_\ell \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} = \int_{(1)} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} + \int_{(2)} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} =$$
$$= \int_{(1)} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} + V_1 - V_2 = 0\,,$$

z čehož vyplývá důležitá rovnice pro skokovou změnu potenciálu na dvojvrstvě

$$\int_{(1)} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} = V_2 - V_1 = \frac{h}{\epsilon_o}\,. \qquad (19.44)$$

Pomocí vektoru objemové hustoty elektrického momentu ***P*** (r') můžeme vyjádřit potenciál obecné soustavy dipólů. Na základě vztahu (19.22) můžeme psát

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{d\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3} = \qquad (19.45)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_\tau \frac{\boldsymbol{P}.\boldsymbol{r}}{r^3}\, d\tau\,,$$

protože elektrický moment odpovídající objemovému elementu $d\,\tau$ je $d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}.d\,\tau$. Podle vztahu (7.16) můžeme psát

$$div\ \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{P}.grad\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\ div\ \boldsymbol{P},$$

(19.46)

takže platí

$$\frac{\boldsymbol{P}.\boldsymbol{r}}{r^3} = \boldsymbol{P}.grad\left(\frac{1}{r}\right) = div\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{r}} - \frac{1}{r}div\boldsymbol{P}.$$

(19.47)

Dosazením rovnice (19.47) do (19.45) dostaneme hledaný výsledek

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_\tau div\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{r}}\right)d\tau - \frac{1}{4\pi\epsilon_o}.\int_\tau \frac{1}{r}div\boldsymbol{P}d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S \frac{\boldsymbol{P}.d\boldsymbol{S}}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_\tau \frac{1}{r}div\boldsymbol{P}d\tau, \end{aligned} \qquad (19.48)$$

přičemž jsme prvý integrál v rovnici upravili použitím Gaussovy - Ostrogradského věta (7.7). Vztah (19.48) je totožný se vztahem (19.41), který jsme měli dokázat. Tento vztah využijeme v dalším článku při výpočtu elektrického pole v reálných prostředích.

ZÁVIŠKA František, 1879-1945, český fyzik. Vystudoval matematiku a fyziku a působil na Karlově universitě v Praze, r. 1914 byl jmenován profesorem teoretické fyziky. V jeho vědeckém dozrávání mu pomohl i jednoroční studijní pobyt u J.J Thomsona a C.T.Wilsona v Anglii. Záviška byl vedoucí osobností československé fyziky mezi dvěma světovými válkami. Zabýval se optikou, Hallovým jevem a zejména buzaním s šířením elektromagnetických vln ve speciálních prostředích. Je autorem asi 20 původních vědeckých prací, které však přes svou vědeckou hodnotu měly ve světě malý ohlas, protože byly publikovány jen v češtině. Byl autorem hodnotných učebnic z mechaniky, termodynamiky a kinetické teorie plynů. Ocenil a populerizoval speciální teorii relativity ve dvacátých a třicátých letech.

19.6 Elektrické pole v reálných látkových prostředcích, Poissonova a Laplaceova rovnice

Reálným látkovým prostředím rozumíme prostor, v kterém se nacházejí látkové objekty, neboli atomy a molekuly. Některá z nich se i bez vnějšího elektrického pole vyznačují nenulovým elektrickým momentem, jiné se na elektrické dipóly mění až účinkem vnějšího elektrického pole. Tento proces se nyzývá polarizace prostředí. Vznik dipólů polarizací pochopíme lehce pomocí obr. 19.14. Původně elektricky neutrální soustava kladného a záporného náboje se ve vnějším poli deformuje, čímž vznikne elektrický dipól. Potom již ale existuje v prostředí nejen elektrické pole vytvářené tzv. volným nábojem, ale i pole dipólů, které vytvářejí tzv. vázaný elektrický náboj (věta 19.22). Pro charakteristiku elektrického pole v této reálné, ale podstatně složitější situaci zavádíme novou užitečnou veličinu - vektor elektrické indukce ***D*** (věta 19.23). Další charakteristiky uvedených jevů jsou uvedeny ve větách (19.24 až 19.27).

19.22 Vztahy (19.49) a (19.50) vyplývají přímo

Vázaný (polarizační) náboj: při polarizaci dielektrik (reálných prostředí) vzniká tzv. vázaný (polarizační) náboj.

Plošná hustota vázaného náboje σ_p na povrchu dielektrika je rovna

$$\sigma_p = P\ \cos\ \alpha = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{n}, \tag{19.49}$$

kde α je úhel mezi dvěma vektory $\boldsymbol{P}$ a $d\boldsymbol{S}$ a platí $d\boldsymbol{S}=dS.\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor ve směru vnější mormály k ploše dS. Objemová hustota vázaného náboje ρ_p v objemu dielektrika je určena vztahem

$$\rho_p = -div\boldsymbol{P}. \tag{19.50}$$

Vektor $\boldsymbol{P}$ (zaveden ve větě 19.19) - objemová hustota dipólového momentu - se v této souvislosti nazývá vektor polarizace (stručně polarizace).

19.23

V tzv. lineárních dielektrikách je vektor polarizace $\boldsymbol{P}$ přímo úměrný výsledné intenzitě elektrického pole $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_o\ \varkappa_e\ \boldsymbol{E}, \tag{19.51}$$

kde $\varkappa_e$ je tzv. susceptibilita, $[\varkappa_e]=1$.

19.24

Vektor elektrické indukce (stručně jen indukce) $\boldsymbol{D}$ je definován vztahem

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}. \tag{19.52}$$

V lineárních dielektrikách pak platí $D=\epsilon_o\boldsymbol{E}+\epsilon_o\varkappa_e\boldsymbol{E}=\epsilon_o(1+\varkappa_e)=\epsilon\boldsymbol{E}$, kde $\epsilon=\epsilon_o(1+\varkappa_e)$ je permitivita prostředí.

19.25

Poměr intenzity elektrického pole ve vakuu $\boldsymbol{E}_o$ a

z vyjádření potenciálu obecné soustavy dipólů (19.41). Srovnáním tohoto vztahu se vztahem pro potenciál spojitě nabitého tělesa (19.10) zjistíme důležitý poznatek, že soustava dipólů vytváří stejné elektrické pole, jako plošný náboj s plošnou hustotou náboje σ_p a objemový náboj s objemovou hustotou náboje ρ_p. Pro plošnou hustotu vázaného náboje tedy σ_p platí

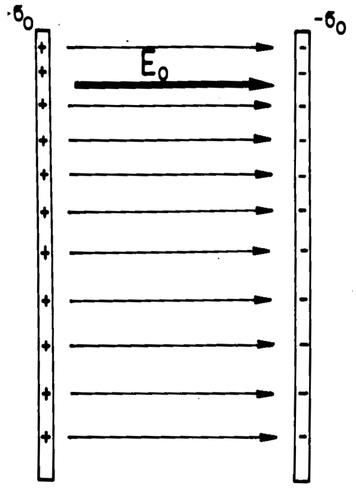
$$\sigma_p dS = \boldsymbol{P}.d\boldsymbol{S}$$
$$a\ nebo \quad \sigma_p = \boldsymbol{P}.\frac{d\boldsymbol{S}}{dS} = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{n}, \tag{19.56}$$

kde $\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{S}/dS$ je jednotkový vektor ve směru vnější normály k ploše dS. Pro objemovou hustotu vázaného náboje ρ_p pak platí

$$\rho_p = -div\boldsymbol{P}. \tag{19.57}$$

V dielektrikách se mohou nacházet vedle sebe volné i vázané elektrické náboje. Volné náboje můžeme získat z vázaných nábojů separací kladného a záporného náboje dipólů. Tento proces se nazývá disociace nebo ionizace.

Vyšetřme výsledné elektrické pole soustavy volného a vázaného náboje. Nejprve proberme elektrické pole plošných nábojů. Pro jednoduchost uvažujmě elektrické pole dvou nabitých paralelních vodivých desek (obr. 19.15). Jestliže nabijeme desky volným elektrickým nábojem stejné velikosti a opačné polarity s plošnou hustotou $\pm\ \sigma_o$, vytvoří se v prostoru mezi deskami homogenní elektrické pole, jehož intenzita je (srovnej s /19.19/) $E_o=\sigma_o/\epsilon_o$. Vložíme-li nyní do prostoru mezi deskami homogenní dielektrikum, vznikne vlivem polarizace na povrchu dielektrika u obou desek vázaný náboj s plošnou hustotou σ_p desky (pro přehlednost je znázorněno pouze polarizované dielektrikum na



v daném prostředí $\boldsymbol{E}$ při jinak stejném rozložení volných nábojů se nazývá relativní permitivita ϵ_r

@ (19.53)

Obr.19.15 K zavedení vektoru el. indukce

19.26
Všechny vztahy odvozené pro elektrické veličiny ve vakuu platí i pro reálné prostředí, jestliže v nich zaměníme permitivitu vakua ϵ_o permitivitou prostředí $\epsilon=\epsilon_o\epsilon_r$.

19.27
Plošná hustota volného náboje σ_o na povrchu reálného prostředí vyhovuje rovnici

$$\sigma_o = \boldsymbol{D}.\boldsymbol{n}, \tag{19.54}$$

kde $\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{S}/dS$ je jednotkový vektor ve směru vnější normály. Objemová hustota volného náboje ρ_o v reálném prostředí vyhovuje rovnici

obr. 19.16). Celková plošná hustota volného a vázaného náboje u levé desky σ pak je (obr. 19.17)

$$\sigma = \sigma_o - \sigma_p \tag{19.58}$$

a u pravé desky -σ.

Tento náboj vytváří v prostoru mezi deskami jiné homogenní elektrické pole, s intenzitou $\boldsymbol{E}$, pro kterou platí na základě Gaussovy věty

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_o - \boldsymbol{E}_p = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_o}, \tag{19.59}$$

kde E_o je intenzita elektrického pole volných nábojů a E_p je intenzita elektrického pole vázaných nábojů. Vidíme, že intenzita elektrického pole v dielektriku se snížila o intenzitu pole vytvářeného vázanými náboji. Jak tedy vyplývá z Gaussovy věty formulované pro náš případ dvou nabitých desek s dielektrikem je nutno při výpočtu intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v dielektriku znát rozložení volného i vázaného náboje σ_o a σ_p. Abychom vystačili při výpočtu elektrických polí v dielektrikách jen se znalostí rozložení volného náboje, zavádí se vektor elektrické indukce $\boldsymbol{D}$. Rovnici (19.59) můžeme upravit zavedením polarizace $|P|=\sigma_p$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} - \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_o} \quad \text{a po úpravě} \quad \sigma_o = \epsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}. \tag{19.60}$$

Elektrickou indukci $\boldsymbol{D}$ zavedeme pomocí plošné hustoty náboje σ_o: $|\boldsymbol{D}|=\sigma_o$ neboli $\boldsymbol{D}.\boldsymbol{n}=\sigma_o$, takže můžeme psát

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{19.61}$$

a zobecnit na vektorový tvar (19.52).

$$\rho_o = div\,\boldsymbol{D}. \qquad (19.55)$$

Obr. 19.14 Polarizace prostředí

Obr. 19.17 K zavedení vektoru el. indukce

Vyšetřme jako druhý případ elektrické pole objemových volných a vázaných nábojů. Zkoumejme výsledné elekrické pole v dielektriku vytvořené objemovým nábojem o celkové objemové hustotě náboje

$$\rho = \rho_o + \rho_p, \qquad (19.62)$$

kde ρ_o je objemová hustota volného náboje a ρ_p = -div $\boldsymbol{P}$ je objemová hustota vázaného náboje (obr. 19.18).

Podle Gaussovy věty můžeme psát pro výslednou intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$

$$\oint_S \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\epsilon_o} \int_\tau \rho\, d\tau . \qquad (19.63)$$

Levou stranu rovnice (19.63) můžeme přepsat použitím Gaussovy-Ostrogradského věty (7.7), pravou stranu pak uvážením rovnice (19.62) a (19.20) spolu s (19.50). Získáme rovnici

$$\int_\tau div\ \boldsymbol{E}\, d\tau =$$

$$= \int_\tau \left(div\boldsymbol{E_o} - \frac{1}{\epsilon_o} div\ \boldsymbol{P} \right) d \qquad (19.64)$$

z které vyplývá, že intenzita výsledného elektrického pole v prostředí je

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_o} - \boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{E_o} - \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_o}. \qquad (19.65)$$

Vidíme tedy, že výsledné elektrické pole je složené z elektrického pole volných nábojů o intenzitě $\boldsymbol{E}_o$ a z pole vázaných nábojů o intenzitě $\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{P}/\epsilon_o$ nezávisí na přítomnosti dipólů a souvisí jen s volným elektrickým nábojem. Zavedeme proto vektor indukce elektrického pole $\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_o \boldsymbol{E_o} = \epsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \qquad (19.66)$$

který rovněž závisí pouze na rozložení volného náboje (vztah /19.52/).Z rovnice (1964) vyplývá důležitý vztah

$$div(\epsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = div \boldsymbol{D} = \rho_o . \tag{19.67}$$

Integrací rovnice (19.67) přes objem τ získáme

$$\begin{gathered}\int div \boldsymbol{D} d\tau = \int \rho_o d\tau = q_o \\ a \ \ dále \\ \oint_s \boldsymbol{D} . d\boldsymbol{S} = q_o ,\end{gathered} \tag{19.68}$$

Obr. 19.18 Homogenně (a) a nehomogenně (b) polarizoavané dielektrikum

což je formulace Gaussovy věty v reálných prostředích, kde q_o je celkový volný náboj obsažený v objemu τ uzavřený polchou S. Uvážíme-li, že platí $\boldsymbol{D}=\epsilon_o \epsilon_r \boldsymbol{E}$, pak rovnici (19.69) můžeme rovněž psát ve tvaru

$$\oint \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} = \frac{q_o}{\epsilon_o \epsilon_r}. \qquad (19.69)$$

Vidíme tedy, že základní zákon elektrostatického pole je v reálných prostředcích formulován stejně jako ve vakuu, jen místo permitivity vakua ϵ_o v něm vystupuje permitivita prostředí $\epsilon=\epsilon_o\epsilon_r$. Stejný závěr platí i pro silové působení elektrického pole.

Síla elektrického pole na náboj je určena vztahem $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\,q$ a protože $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_o/\epsilon_r$ je ϵ_r x menší než by byla při nepřítomnosti vázaných nábojů ve vakuu.

Místo rovnice (19.20) musíme tedy v reálných prostředcích používat rovnici

$$div\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho_o}{\epsilon}. \qquad (19.70)$$

Jestliže intenzitu elektrického pole vyjádříme pomocí potenciálu $\boldsymbol{E}$=-grad V a použijeme-li vztah (7.5), můžeme rovnici (19.70) napsat ve i tvaru

$$-div\ grad\ V = -\Delta\, V \frac{\rho_o}{\epsilon}, \qquad (19.71)$$

kde Δ je Laplaceův operátor (7.5). Tato rovnice se nazývá Poissonova diferenciální rovnice. Jestliže nejsou v prostoru volné náboje (ρ_o=0) přechází Poissonova rovnice na tzv. Laplaceovu diferenciální rovnici

$$\Delta\ V = 0. \qquad (19.72)$$

Charakteristické konstanty reálného prostředí jsme zavedli jako skaláry. Ukazuje se, že např. v krystalech mají povahu tenzorů.

LAPLACE Pierre Simon (laplas), 1749-1827, francouzský matematik, fyzik a astronom. V matematice se zabýval problémy vyšší analýzy a počtu pravděpodobnosti, ve fyzice zejména analytickou mechanikou, pohybem planet, vlněním a teorií gravitace. Na jeho počest je pojmenován jeden ze základních operátorů vektorové analýzy.

19.7 Zobrazování elektrického pole, podmínky na rozhraní

Graficky se elektrické pole zobrazuje pomocí soustavy siločar a ekvipotenciálních hladin. Na rozhraní dvou různých prostředí musí být splněné určité podmínky, které můžeme formulovat pomocí zákona lomu siločar.

19.28
Siločára elektrostatického pole je orientovaná čára, která je v každém bodě souhlasně rovnoběžná se směrem intenzity elektrického pole. Hustota siločar okolí daného bodu je úměrná velikosti intenzity elektrického pole.

19.29
Ekvipotenciální hladina elektrostatického pole je čára, resp. plocha spojující místa stejného potenciálu elektrostatického pole. Siločáry jsou v každém bodě kolmé na ekvipotenciální hladiny.

19.30
Na rozhraní dvou prostředí splňují tečné složky intenzity elektrického pole a normálové složky indukce elektrického pole podmínku

$$\boldsymbol{E}_{1t} = \boldsymbol{E}_{2t} \tag{19.73}$$

$$\boldsymbol{D}_{1n} - \boldsymbol{D}_{2n} = \sigma_o , \tag{19.74}$$

kde σ_o je plošná hustota volného náboje na rozhraní.

19.31
Zákon lomu siločar elektrostatického pole na rozhraní dvou prostředí na kterém se nenachází volný náboj je

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} . \tag{19.75}$$

Podle definice 19.28 vycházají siločáry elektrostatického pole vždy z kladného náboje a končí v záporném náboji. Jelikož mají směr síly na kladný náboj, určují i směr zrychlení kladného náboje vloženého do elektrického pole. Vzhledem k tomu, že tento náboj může mít libovolně orientovanou počáteční rychlost, neurčují ale siločáry obecnou dráhu pohybu náboje v elektrostatickém poli.

Jestliže postupujeme ve směru ekvipotencionální hladiny, je $dV=-\boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r}=0$, a proto musí být cos $\alpha=0$ neboli $\alpha=\pi/2$, jelikož ani $\boldsymbol{E}$ ani $d\boldsymbol{r}$ nejsou rovny nule. Směr siločar elektrostatického pole je tedy vždy kolmý na ekvipotenciální hladinu, jak je uvedeno ve větě 19.29. Příklad znázornění elektrického pole pomocí siločar a ekvipotenciálních hladin v okolí dipólu je na obr. 19.2.

Jelikož elektrické pole je konzervativní, je křivkový integrál intenzity elektrostatického pole po uzavřené křivce roven nule,

$$\oint \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} = 0 . \tag{19.76}$$

Zvolme si integrační dráhu v podobě obdélníka zesehujícího do obou stýkajících se prostředí (obr. 19.19). Z rovnice (19.76) proto vyplývá

$$\boldsymbol{E}_1 d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{E}_2 d\boldsymbol{r}_2 = 0 . \tag{19.77}$$

Příspěvky bočních stran obdélníka se vzájemně zruší. Označíme-li jednotkový vektor ve směru diferenciálu polohového vektoru $d\boldsymbol{r}_1$ ρ, platí $d\boldsymbol{r}_1=ds$ρ a $d\boldsymbol{r}_2=-ds$ρ a jelikož $\boldsymbol{E}_1$ρ a $\boldsymbol{E}_2$ρ jsou průměty příslušných intenzit elektrostatického pole v obou prostředích do roviny rozhraní (neboli do směru tečny) to je jejich tečné složky, dostaneme z rovnice (19.77) rovnici $E_{1t}=E_{2t}$, což bylo třeba dokázat.

Obr. 19.19 K odvození průběhu vektoru intenzity el. pole na rozhraní dvou prostředí

Obr. 19.20 K odvození průběhu vektoru indukce elektrického pole na rozhraní dvou prostředí

Podmínku (19.74) najdeme na základě Gaussovy věty. Podle obr. 19.20 zvolíme uzavřenou plochu ve tvaru válečku o základně *dS*, který zasahuje do obou prostředí. Gaussova věta má pak tvar

$$\boldsymbol{D_1} . d\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{D_2} . d\boldsymbol{S_2} = \sigma_o dS, \qquad (19.78)$$

kde σ_o je plošná hustota volného náboje na rozhraní. Toky vektoru indukce $\boldsymbol{D}$ bočními stěnami válečku zanedbejme. Zavedeme-li jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$ kolmý na rovinu rozhraní směřující do prvého prostředí, můžeme psát

$$d\boldsymbol{S_1} = \boldsymbol{n} dS \quad a$$
$$d\boldsymbol{S_2} = -\boldsymbol{n} dS$$

a jestliže uvážíme, že součiny $\boldsymbol{D}_1.\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{D}_2.\boldsymbol{n}$ jsou normálové složky vektorů indukce v obou prostředích, dostaneme z rovnice (19.78) podmínku (19.74). Zbývá uvést, že v případě nepřítomnosti volného náboje na rozhraní se podmínka (19.74) zjednoduší na tvar $D_{1n}=D_{2n}$.

Podle obr. 19.21 můžeme psát pro rozhraní dvou prostředí bez volných nábojů

$$tg\ \alpha_1 = \frac{E_1t}{E_1n},\ tg\ \alpha_2 = \frac{E_2t}{E_2n},$$

takže platí rovnice v případě nepřítomnosti volných nábojů na rozhraní

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{E_1t}{E_2t}\ \frac{E_2n}{E_1n} = \frac{\epsilon_1 D_2n}{\epsilon_2 D_1n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2},$$

která vyjadřuje zákon lomu siločar (19.75). Jelikož světlo, jak víme, obsahuje jako jednu složku i elektrické pole, má odvozený zákon význam i v optice.

Obr. 19.21 K odvození zákona lomu siločar elektrického pole na rozraní dvou prostředí

19.8 Kapacita

Volný elektrický náboj přivedený na vodivé těleso se rozloží na jeho povrchu tak, že potenciá povrchu tělesa je všude konstantní. Vodiče můžeme proto využít na shromažďování volného elektrického náboje a na vytváření velkých potenciálových rozdílů. Velikost náboje na vodičích je určena nejen potenciálem jejich povrchů, ale i jejich geometrií a jak uvidíme později v případě soustavy vodičů i elektrickými vlastnostmi prostředí mezi nimi. Podobně jako např. množství plynu v nádobě je úměrné tlaku, je náboj na vodiči podle vztahu (19.8) přímo úměrný potenciálu na jeho povrchu. V případě dvou stejných nábojů s opačnými znaménky umístěnými na dvou blízko sebe se nacházejících vodičích je tento náboj úměrný rozdílu potenciálu obou vodičů. Konstantu úměrnosti nezávislou v obou případech ani na velikosti náboje ani na potenciálu, resp. napětí, nazýváme kapacita. Podle toho kapacita charakterizuje schopnost těles shromažďovat elektrický náboj. Tyto a některé další definice jsou obsahem vět 19.31 až 19.33.

19.31
Kapacita osamoceného vodiče C je definována podílem jeho náboje a potenciálu jeho povrchu

$$C = \frac{Q}{V}. \qquad (19.79)$$

Kapacita dvou vodičů (kondenzátoru) je definovaná podílem náboje na jednom vodiči a rozdílem potenciálů obou vodičů

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U}. \qquad (19.80)$$

Můžeme lehce zjistit, že kapacita definovaná vztahy (19.79) a (19.80) je vždy kladné číslo. Je-li elektrický náboj záporný, změní se i znaménko potenciálu, resp. napětí, takže podíl zůstane kladný. Jednotka kapacity *F* je pro měření příliš velká, proto se častěji používají díly - μ*F* (1 μ*F* = 10^{-6} *F*) a *pF* (1 *pF* = = 10^{-12} *F*).

Vztah (19.81) pro kapacitu osamělé koule dostaneme přímo z vyjádření potenciálu na jejím povrchu. Podle věty 19.11 můžeme při výpočtu elektrického pole soustředit náboj z povrchu koule do jejího středu, takže potenciál povrchu koule je roven

Jednotka kapacity je $[C]=[Q]/[U]=C/V=F$ (farad).

19.32
Kapacita osamělého kulového vodiče, deskového a válcového kondenzátoru jsou

$$C_k = 4\pi\epsilon_o R \tag{19.81}$$

$$C_d = \frac{\epsilon_o \epsilon_r S}{d} \tag{19.82}$$

$$C_d = \frac{2\pi\epsilon_o\epsilon_r h}{ln\ r_1 - ln\ r_2}, \tag{19.83}$$

kde R je poloměr koule, S plocha desky, d vzdálenost desek, r_1 a r_2 poloměry válců a h jejich výška.

19.33
Výsledná kapacita paralerně spojených kondenzátorů (obr. 19.22) je rovna součtu kapacit jednotlivých kondenzátorů

$$C = \Sigma C_i. \tag{19.84}$$

Převrácená hodnota výsledné kapacity kondenzátorů spojených sériově (obr. 19.23) je rovna součtu převrácených hodnot kapacit jednotlivých kondenzátorů

$$\frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{C_i}. \tag{19.85}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{R}.$$

Dosazením permitivity vakua $\epsilon_o = 8{,}85.10^{-12}\ Fm^{-1}$ do vztahu (19.81) dostaneme, že kapacita $C = 1\ F^{10}\ m$. I z tohoto příkladu je vidět, že jednotka F je skutečně velmi velká.

Kapacita deskového kondenzátoru (19.82) (obr. 19.24) vypočítáme podle definice 19.31 tak, že napětí U vyjádříme pomocí křivkového integrálu intenzity elektrostatického pole

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r}. \tag{19.86}$$

Jestliže předpokládáme, že desky kondenzátoru jsou dostatečně velké, je elektrické pole uvnitř kondenzátoru homogenní (věta 19.12). Jeho intenzita je $E = \sigma/\epsilon_o\ \epsilon_r = Q/S\ \epsilon_o\ \epsilon_r$, kde Q je náboj na desce, takže vztah (19.86) pro napětí můžeme upravit na tvar

$$U = \int_O^d E\ dS = \frac{Q}{S\ \epsilon_o\epsilon_r} d,$$

z kterého již bezprostředně vyplývá vztah (19.82). Podle něj je kapacita deskového kondenzátoru tím větší, čím větší je plocha desek, čím větší je relativní permitivita prostředí mezi deskami a čím menší je vzdálenost mezi deskami. V klasických kondenzátorech byla tato vzdálenost kolem 1 *mm*, v současné elektrotechnice se však vyrábějí i kondenzátory se vzdálenostmi vodivých vrstev až kolem 1 µ*m*, takže takové kondenzátory mají i při malé ploše desek (kolem mm^2) poměrně velkou kapacitu.

Kapacitu válcového kondenzátoru (19.83) najdeme podobným postupem. Věta 19.33 vyplývá bezprostředně ze skutečnosti, že v prvém případě paralelního zapojení kondenzátorů se výsledný elektrický náboj rovná součtu nábojů na jednotlivých kondenzátorech $Q=\Sigma\ Q_i$ při stejném napětí na všech kondenzátorech a v druhém případě seriového zapojení kondenzátorů se zase výsledné napětí rovná součtu napětí na jednotlivých kondenzátorech $U=\Sigma\ U_i$ při stejném náboji na jednotlivých kondenzátorech.

Je-li mezi vodiči, které tvoří kondenzátor látka s relativní permitivitou ϵ_r je elektrické pole mezi vodiči ϵ_r kráte menší, proto i kapacita takového kondenzátoru je ve srovnání s vakuovým kondenzátorem ϵ_r kráte větší.

Obr. 19.22 Paralerní řazení kondenzátorů

Obr. 19.23 Seriové řazení kondenzátorů

Obr. 19.24 K odvození kapacity deskového kondenzátoru

19.9 Energie elektrického pole

Již v úvodu k fyzikálním polím jsme zdůraznili, že tato pole nejsou jen formální pomůckou, ale fyzikální skutečností. Toto tvrzení podpoříme nyní tím, že dokážeme, že právě tak jako látkové objekty jsou pole nosičem energie. Tato energie odpovídá práci vynaložené na vytvoření pole (např. elektrické pole mezi deskami kondenzátoru při jeho nabíjení), resp. energií, která se uvolní při zániku pole (při vybití kondenzátoru). Její vyjádření poskytují věty 19.34 až 19.36.

19.34
Elektrostatická energie nabitého osamoceného vodiče resp. kondenzátoru je

Zkoumejme nejprve práci vnějších sil při nabíjení vodivé koule poloměru R na potenciál V. Podle věty o přírůstku energie platí, že změna energie systému je rovna práci vnějších sil, což v

$$W_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} (\qquad (19.87)$$

resp.

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} (\qquad (19.88)$$

19.35

Potenciál energie soustavy bodových nábojů, resp. spojitě rozloženého náboje je

$$W_{pe} = \frac{1}{2} \Sigma Q_i V_i \qquad (19.89)$$

resp.

$$W_{pe} = \frac{1}{2} \int_\tau V \rho \, d\tau . \qquad (19.90)$$

19.36

Hustota energie elektrického pole je

$$W_e = \frac{\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}}{2} . \qquad (19.91)$$

LANDAU Lev Davidovič, 1908-1968, význačný sovětský teoretický fyzik. Jeho vědecké práce spadají do oblasti teorie pevnývh látek, fyziky nízkých teplot, jaderné fyziky a kosmického záření. Vypracoval teorii fázových přechodů druhého druhu v pevných látkách, makroskopickou teorii supratekutosti helia, rozvinul teorii supravodivosti aj. Výsledky jeho prací z oboru nízkých teplot mají praktické využití i v raketové technice. Za průkopnické práce v teorii nízkých teplot mu r. 1962 byla udělena Nobelova cena. Landau byl znám jako autor vynikajících učebnic. Jeho sedmisvazková "Teoretická fyzika" (spoluautorem je E.M.Lifšic) se dodnes považuje za dílo mimořádné vědecké i didaktické hodnoty.

našem případě bude

$$dW_{pe} = dA.$$

Předpokládejme, že koule je již nabita určitým nábojem, který vytváří v okolí koule elektrické pole intenzity $\boldsymbol{E}$. Proto je přísun dalšího náboje dQ spojen s prací vnějších sil

$$dA = -\int_\infty^R dQ \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r} = V dQ . \qquad (19.92)$$

Vyjádříme-li diferenciál dQ pomocí kapacity a diferenciálu potenciálu $dQ=CdV$, dostaneme pro celkovou práci vztah

$$W_{pe} = A = \int_o^V VC\,dV = \frac{1}{2} C V$$

což je prvý ze vztahů (19.87). Ostatní dva dostaneme využitím relace $Q=CV$. Je zřejmé, že vztah $W_e=Q^2/2C$ můžeme použít i pro energii nabitého kondenzátoru. Další dvě vyjádření (19.88) vzniknou využitím vztahu $Q=CU$.

Je zajímavé si všimnout, že desky kondenzátoru nabité nábojem opačného znaménka se přitahují určitou silou. Podle vztahu (11.28) platí pro tuto sílu

$$|F| = \frac{dW_{pe}}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{c}\right)}{dx} = \frac{Q^2}{2} \frac{d\frac{1}{c}}{dx}$$
$$= \frac{Q^2}{2\epsilon_o \epsilon_r S} = \frac{1 Q^2}{2cx} ,$$

kde U je napětí na kondenzátoru a x je vzdálenost mezi deskami. Tato síla se využívá v tzv. absolutním elektrometru na stanovení napětí. Změříme-li totiž sílu F, potom můžeme připojené napětí vyjádřit vztahem

$$U = \left(\frac{2xF}{C} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Jelikož v ideálním kondenzátoru je elektrické pole omezeno jen na prostor mezi deskami, můžeme jeho energii vyjádřit i následovně

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S^2}{\epsilon S} d =$$
$$= \left(\frac{1}{2} E D\right) S d = w_e \,.\, \tau \,, \qquad (19.93)$$

kde součin $Sd=\tau$ je objem kondenzá 19.24) a $w_e=ED/2$ je hustota energie elektrického pole v něm. V další úvaze ukážeme, že k podobnému výsledku vede i výpočet energie elektrického pole v obecném případě.

Obr. 19.25 K výpočtu potenciální energie soustavy nábojů

Uvažujme nejprve o soustavě bodových nábojů v prostoru. Za rozložení nábojů s nulovou potenciální energií budeme takové rozložení, v kterém jsou všechny náboje od sebe nekonečně vzdálené. Vezmeme-li nejprve jen dva náboje q_1 a q_2 a přiblížíme-li je do vzájemné vzdálenosti $r_{12}=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$, (obr. 19.25) vykoná vnější síla práci, která je rovna jejich vzájemné potenciální energii

$$\left(W_{pe}\right)_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} \,.$$

Tento vztah můžeme formálně napsat i ve tvaru

$$\left(W_{pe}\right)_{12} = \frac{1}{2}\left[Q_1\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_2}{r_{12}}\right) + Q_2\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_1}{r_{12}}\right)\right]. \qquad (19.94)$$

Výraz v pravé kulaté závorce však je potenciál náboje Q_2 v místě prvého náboje (V_1), výraz v druhé závorce zase potenciál náboje Q_1 v místě druhého náboje (V_2), proto výraz (19.94) můžeme napsat i v následujícím tvaru

$$\left(W_{pe}\right)_{12} = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right).$$

Dá se očekávat (můžeme to však i exaktně dokázat), že analogicky můžeme vyjádřit i potenciální energii soustavy libovolného počtu bodových nábojů

$$W_{pe} = \frac{1}{2}\Sigma\, Q_i V_i \,,$$

což je vztah (19.89) platný pro spojitě rozložený náboj s objemovou hustotu ρ vyplývá z předchozího záměnou $\Sigma Q_i \to \int \rho \, d\tau$. Vztah (19.90) můžeme dále upravit použitím rovnice (19.55)

$$W_{pe} = \frac{1}{2}\int V\rho\, d\tau = \frac{1}{2}\int V div \boldsymbol{D}\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\int div(VD)\, d\tau - \frac{1}{2}\int (grad V).\boldsymbol{D}\, d\tau \qquad (19.95)$$

přičemž jsme využili platnost rovnice

$$div\, V\boldsymbol{D} = V div \boldsymbol{D} + (grad V).\boldsymbol{D}.$$

Prvý integrál na pravé straně rovnice (19.95) můžeme upravit použitím Gaussovy-Ostrsgradského věty

$$\int div\, V\boldsymbol{D}\, d\tau = \int V\boldsymbol{D}.d\boldsymbol{S}. \qquad (19.96)$$

Jelikož se nám jedná o výpočet energie celého elektrostatického pole, musíme integrovat po ploše v nekonečnu, tj. musíme si zvolit např. kulovou plochu s poloměrem $r \to \infty$. Potenciál V klesá úměrně $1/r$, indukce $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ úměrně $1/r^2$, takže i když uvážíme, že $\int dS$ roste úměrně r^2, výsledná hodnota tohoto integrálu je úměrná $1/r$. Při $r \to \infty$ se hodnota rovná proto nule. Poslední integrál v rovnici (19.95) můžeme přepsat do tvaru

$$W_{pe} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}\, d\tau = \int w_e\, d\tau\,, \qquad (19.97)$$

kde $w_p = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}/2$ má význam hustoty energie. Tím jsme dokázali i tvrzení (19.36).

Vztahy (19.89) a (19.97) velmi názorně vyjadřují dva názory na fyzikální realitu. Prvé vyjádření odpovídá starší představě o "reálnosti" jen látkových objektů s elektrickými náboji, druhé odpovídá současné představě, podle které je elektrická energie akumulovaná v elektrickém poli.