ČÁST V FYZIKÁLNÍ POLE

Pole je druhá základní forma existence hmoty (vedle látky). Trvalo to však dosti dlouho, než se fyzici dopracovali k představě pole. Potřeba zavedení takové představy se ukázala tehdy, jakmile se zjistilo, že mezi tělesy mohou působit gravitační, elektrické a magnetické síly i tehdy, jestliže se tělesa vzájemně nedotýkají a přímo tedy na sebe nepůsobí. Hypotéza o působení sil "na dálku" nemohla obstát z fyzikálního ani filosofického hlediska. Z hlediska realistického pohledu na svět si přenos síly vyžaduje hmotné "medium". Toto medium pod názvem "pole" neznamenalo ze začátku nic jiného, než prostor, v kterém se projevují gravitační, elektrické a magnetické síly. Názornému chápání přenosu sil v polích zodpovídala snaha zobrazovat pole systémem tzv. siločar. Směr siločar udával směr působení síly, jejich hustota velikost působící síly.

Vývoj fyziky koncem 19. století a začátkem 20. století dospěl k závěru, že pole nejsou jen výmyslem našeho mozku a souborem fiktivních siločar, ale že jsou to hmotné objekty, které mají rovněž svou vlastní strukturu. Základními elementy elektromagnetického pole jsou tzv. f o t o n y, jejichž existence je bezesporá, základními částicemi gravitačního pole jsou tzv. g r a v i t o n y , které sice nebyly ještě přímo pozorované (naše současná experimentální technika není ještě na to připravená), o jejich existenci však již nikdo nepochybuje.

Silové účinky mezi tělesy, elektrické a magnetické síly mezi elektricky nabitými částicemi a částicemi s nenulovým magnetickým momentem se tedy uskutečňují tak, že navzájem "interagují" pole, která jsou bezprostředně spjatá s hmotností, elektrickým nábojem nebo magnetickým momentem. Je proto přirozené, že při budování teorie silových účinků je potřebné vycházet ze základních charakteristik pole. Takovou teorii nazýváme teorií pole a jestliže přitom nepřihlížíme k tomu, že silové účinky se šíří konečnou rychlostí a že pole má svou "jemnou" strukturu, máme před sebou tzv. klasickou teorii pole. O vzpomínané dvě další reálné vlastnosti pole rozšiřují naše poznatky o polích teorie relativity a kvantové teorie.

Fyzikální pole jsou nerozlučně spjatá s třemi základními vlastnostmi základních částic látek - s jejich hmotností (gravitační pole), elektrickým nábojem (elektrické pole) a magnetickým momentem (magnetické pole). Magnetické pole však vzniká i v okolí pohybujících se elektrických nábojů.

18 GRAVITAČNÍ POLE

Newtonův gravitační zákon
Intenzita a potenciál gravitačního pole
Gravitační zrychlení
Volný pád, svislý a šikmý vrh
Kosmické lety
Planetární pohyb

Gravitačním polem nazýváme prostor kole tělesa s danou hmotností, v kterém se projevují silové účinky na jiná tělesa. Souvisí bezprostředně s hmotností tělesa, které je vytváří. Silové účinky gravitačního pole vystihuje Newtonův gravitační zákon.

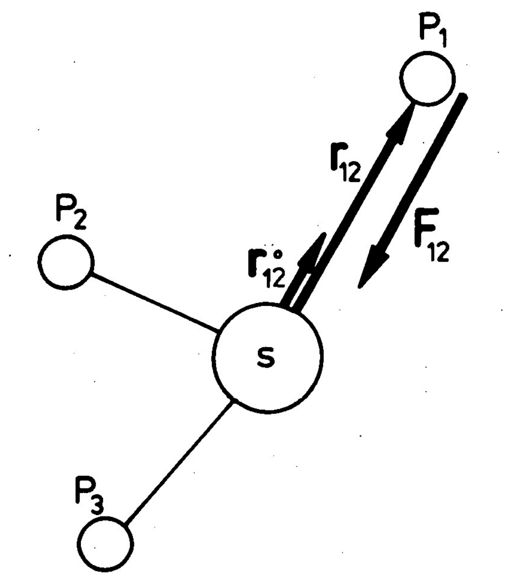
18.1 Newtonův gravitační zákon

Newton nejen že přispěl k objevení gravitačních sil, ale našel i jejich matematické vyjádření (věta 18.1), a tím vlastně položil základy později široce rozpracované teorii pole. Podobný zákon našel později Coulomb i pro silové účinky elektrických nábojů.

18.1
Newtonův gravitační zákon: hmotný bod hmotnosti m_1 působí na jiný bod s hmotností m_2 přitažlivou silou, která je přímo úměrná součinu obou hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzájemné vzdálenosti r_{12}

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\varkappa \frac{m_1 m_2 \boldsymbol{r}_{12}^o}{r_{12}^2} = -\varkappa \frac{m_1}{r} \tag{18.1}$$

kde r_{12}^o je jednotkový vektor ve směru vektoru r_{12} a $\mathcal{H}$ je Newtonova gravitační konstanta $\mathcal{H}$=6,670.10^{-11} $m^3 kg^{-1} s^{-2}$.



Obr. 18.1 Gravitační síla, kterou působí Slunce na planety

KEPLER Iohan, 1571-1630, německý vědec, jeden z tvůrců nebeské mechaniky. Po studiích pracoval v Gracu a Praze, kde spolupracoval s dánským astronomem Tycho de Brahe, na základě jehož pozorování objevil zákony pohybu planet. Zjistil, že

Newton odvodil svůj zákon z Keplerových zákonů, týkajících se pohybu planet. Zdálo by se proto, že Keplerovy zákony jsou obecnějšími zákony. Skutečnost je však opačná. Newtonův gravitační zákon se týká vzájemného působení libovolných dvou těles (nejen planet) a Keplerovy zákony vyplývají zpětně z Newtonova gravitačního zákona jen jako speciální případ s omezenou platností.

Ze tří známých Keplerových zákonů má pro odvození Newtonova gravitačního zákona bezprostřední význam jen třetí z nich:
druhé mocniny oběžných dob planet při jejich oběhu kolem Slunce jsou úměrné třetím mocninám velkých poloos jejich eliptických drah. Nahradíme-li pro jednoduchost eliptické dráhy kruhovými (což je předpoklad velmi blízké realitě), můžeme psát

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = ... = konst. \tag{18.2}$$

kde r_1 a r_2 jsou poloměry příslušných drah. Budeme předpokládat, že po kruhové dráze se planety pohybují konstantní oběžnou rychlostí $v = r\omega$, takže příslušné zrychlení má jen normálovou složku $a = a_n = r\omega^2 = r\,(2\pi/T)^2$, z čehož vyplývá pro druhou mocninu doby oběhu T

$$T^2 = 4\pi^2 . \frac{r}{a} . \tag{18.3}$$

Dosadíme-li (18.3) do (18.2) dostaneme rovnici, z které vyplývá, že zrychlení každé planety je pohyb planet kolem Slunce je po eliptických drahách a stanovil rovněž doby oběhu po těchto drahách. Své ideje vyložil v dílech "Nová astronomie" (1609) a "Harmonie světa" (1619). Jeho práce se staly základem objevu I.Newtonova jak v oblasti dynamiky, tak i v oblasti gravitace. V r. 1627 zakončil práci na tabulkách, určujících pohyb planet, s kterými pracovalo několik pokolení astronomů. Jeho přínos je i v oblasti optiky - zkonstruoval dalekohled.

nepřímo úměrné poloměru její kruhové dráhy

$$a = k\frac{1}{r^2}, \tag{18.4}$$

kde k je konstanta.

Podle toho působí Slunce na danou planetu silou $F_{12}=ma=k\ m/r^2$, kde m je hmotnost planety. Podle principu akce a reakce však stejně velkou silou působí i planeta na Slunce. $F_{21}=Ma=k'M/r^2$, kde M je hmotnost Slunce. Musí tedy platit rovnice

$$k\frac{m}{r^2} = k'\frac{M}{r^2}, \tag{18.5}$$

kterou můžeme splnit volbou $k=\mathcal{H}M$ a $k'=\mathcal{H}m$, kde $\mathcal{H}$ je obecná konstanta nezávislá na velikosti hmotností zúčastněných těles. Sílu působící mezi Sluncem a planetou můžeme proto vyjádřit (co do velikosti) vztahem

$$F = \varkappa\frac{mM}{r^2}. \tag{18.6}$$

Síla, kterou působí Slunce na planety (obr. 18.1) směřuje proti polohovým vektorům r určujícím polohu planet vzhledem ke Slunci. Má tedy směr určený jednotkovým vektorem $-r^o=-r/r$, proto vztah (18.6) má ve vektorovém tvaru vyjádření

$$\boldsymbol{F} = -\varkappa\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{r}^o = -\varkappa\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}. \tag{18.7}$$

Zobecněním tohoto zákona na libovolná dvě tělesa s hmotnostmi m_1 a m_2 dospěl Newton k obecnému vyjádření gravitačního zákona ve znění 18.1. Jeho matematickou formulací je vztah (18.1).

18.2 Intenzita a potenciál gravitačního pole

Jako základní charakteristiky gravitačního pole se zavádějí intenzita gravitačníhi pole $\boldsymbol{E}$ a potenciál gravitačního pole V (věta 18.2 až 18.5).

18.2
Intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{E}$ je definována jako podíl síly $\boldsymbol{F}$, která v daném místě působí na hmotný

Prvotní charakteristikou pole je jeho intenzita, protože udává silové účinky, avšak její výpočet v případě systému hmotných bodů a těles s bod hmotnosti *m*' a této hmotnosti *m*'

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{m'}. \qquad (18.8)$$

Jednotka intenzity gravitačního pole $[E]=ms^{-2}$.

18.3

Intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{E}$ hmotného bodu hmotnosti *m* je

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}. \qquad (18.9)$$

Intenzita gravitačního pole soustavy hmotných bodů

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \sum_i \frac{m_i}{r_i^3}\boldsymbol{r_i} \qquad (18.10)$$

a tělesa

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \int_m \frac{dm}{r^3}\boldsymbol{r} = -\varkappa \int_V \qquad (18.11)$$

kde ρ je měrná hmotnost a $d\tau$ je objemový element tělesa.

18.4

Potenciál gravitačního pole *V* v daném místě je definován jako podíl potenciální energie gravitační W_p tělesa hmotnosti *m*' v tomto místě a jeho hmotnosti *m*'

$$V = \frac{W_p}{m'}. \qquad (18.12)$$

Jednotka potenciálu gravitačního pole je $[V]=J\,kg^{-1}= m^2s^{-2}$. Potenciál gravitačního pole zpravidla nezanedbatelnými rozměry (vztahy /18.10/ a /18.11/) je velmi složitý. Jedná se totiž o veličinu vektorové povahy. I proto se pro popis gravitačního pole využívá více potenciálu, který je skalární veličinou. Intenzita gravitačního pole se určí z potenciálu na základě vztahu (18.16).

Vztahy (18.13) - (18.15) vyplývají na základě definice 18.4 ze vztahu pro potenciální energii (11.26), do které dosadíme za sílu $\boldsymbol{F}$ mezi dvěma tělesy hmotností *m* a *m*' z Newtonova gravitačního zákona (18.1). Dostaneme pak pro přírůstek potenciální gravitační energie soustavy tvořené tělesy *m* a *m*' mezi body $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$

$$W_{p2} - W_{p1} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \varkappa\, m m' \int_{r_1}^{r_2} \frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{dr}}{r^3}$$

$$= m m' \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r_2} = -\left(\varkappa \frac{mm'}{r_2} - \varkappa \frac{mm'}{r_1}\right). \qquad (18.17)$$

Podle definičního vztahu (18.17) můžeme tedy stanovit <u>přírůstek</u> potenciální energie gravitační mezi <u>dvěma libovolnými body</u>. Potenciální energie v <u>daném bodě</u> je tedy definována až na konstantu, kterou můžeme volit. Tato konstanta se volí zpravidla tak, aby hodnota potenciální energie v bodě nekonečně vzdáleném se blížila k nule ($r_2 \to \infty$; $W_{r2} \to 0$). Potenciální gravitační energie v daném místě pak je

$$W_p(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\infty} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = -\varkappa \frac{mm'}{r} \qquad (18.18)$$

Potenciál gravitačního pole jsme definovali podle (18.12) jako podíl $V=W_p/m'$, proto podle (18.18) je potenciál gravitačního pole hmotného bodu hmotnosti *m* roven vztahujeme k nekonečnu, proto je potenciál v nějakém místě rovněž definován prací vykonanou silou gravitačního pole při vzdálení tělesa libovolné hmotnosti *m*' z tohoto místa do nekonečna, dělenou touto hmotností *m*'

$$V = \frac{1}{m'} \int_{\boldsymbol{r}}^{\infty} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}}^{\infty} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{r}.$$

Potenciál gravitačního pole hmotného bodu, systému hmotných bodů a tělesa je

$$V = -\varkappa \frac{m}{r}, \tag{18.13}$$

$$V = -\varkappa \sum_i \frac{m_i}{r_i}, \tag{18.41}$$

$$V = -\varkappa \int_m \frac{dm}{r} = -\varkappa \int_V \frac{\varrho\, dV}{r} \tag{18.15}$$

18.5
Intenzita gravitačního pole ***E*** a potenciál gravitačního pole *V* vzájemně souvisí podle vztahu

$$\boldsymbol{E} = -grad\, V. \tag{18.16}$$

$$V = \frac{W_p}{m'} = -\varkappa \frac{m}{r},$$

což je vztah (18.13). Rozšíření výsledku odvozeného pro hmotný bod na systém hmotných bodů je v důsledku aditivnosti potenciálu (skalární veličina!) jednoduchá (vztah /18.14/) a rozšíření na těleso konečných rozměrů můžeme provést stejně jako v případě výpočtu těžiště (13.4). Vztah (18.16) byl zaveden ve větě 11.30.

Výsledek (18.17) vyjadřuje, že práce gravitačního pole nezávisí na tvaru dráhy (obr. 18.2), závisí jen na počáteční a koncové poloze přenášeného tělesa. Podle definice 11.9 je tedy gravitační pole potenciálové. Dokázali jsme již v článku 11.4 že při pohybu v potenciálových silových polí platí zákon zachování celkové energie izolované soustavy (věta 11.21). Platnost tohoto zákona můžeme jednoduše ověřit na příkladě volného pohybu tělesa v gravitačním poli. Vztah (18.17) vlastně vyjadřuje i práci sil pole při přenesení tělesa z bodu r_1 do bodu r_2 (znaménko -)

$$A_{12} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = W_{p1} - W_{p2}.$$

Tato práce však musí být zrovna podle definice 11.17 přírůstku kinetické energie mezi místem 1 a 2, to je $A_{12}=W_{k2}-W_{k1}$, takže platí

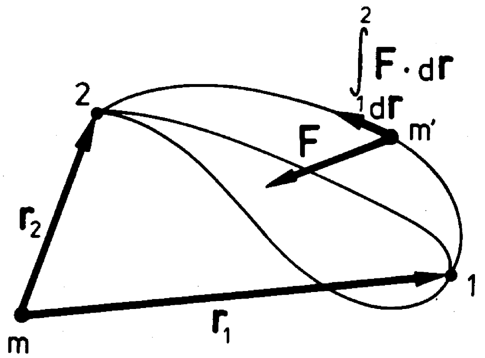
$$W_{p1} - W_{p2} = W_{k2} - W_{k1}, \tag{18.19}$$

a nebo po úpravě

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2} = kon. \tag{18.20}$$

Jelikož obě místa byla vybrána náhodně, platí tento zákon obecně. V každém bodě gravitačního pole je tedy součet kinetické a potenciální energie gravitační konstantní.

I přímým výpočtem potenciálu ze vztahu (18.15) můžeme dokázat, že potenciál (a proto i intenzita) gravitačního pole na povrchu homogenní koule a v jejím okolí je stejný, jako v případě hmotného bodu stejné hmotnosti umístěné v jejím středu.



Obr. 18.2 K práci v gravitačním poli

To umožňuje např. výpočet všech silových účinků Země vycházející z předpokladu, že celá hmotnost zeměkoule je soustředěna v jejím středu.

18.3 Gravitační zrychlení

Na každé těleso v gravitačním poli působí síla, která vyvolává podle Newtonova zákona síly zrychlení jeho pohybu, pokud na toto těleso nepůsobí žádné jiné síly. Toto zrychlení nazýváme gravitační zrychlení (věta 18.6 až 18.8).

18.6

Gravitační zrychlení v každém bodě gravitačního pole a_g je rovno intenzitě gravitačního pole v tomto bodě

$$\boldsymbol{a_g} = \boldsymbol{E}. \tag{18.21}$$

Zrychlení v gravitačním poli Země je proto

$$\boldsymbol{a_g} = -\varkappa \frac{M}{(R+h)^2}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{o}}, \tag{18.22}$$

kde M je hmotnost Země, R je její poloměr a h je výška nad povrchem.

18.7

Velikost tíhového zrychlení g na povrchu Země

Tvrzení 18.6 vyplývá z věty 18.2. Podle ní síla působící v gravitačním poli na těleso hmotnosti m' je $\boldsymbol{F}=m'E$. Tato síla však podle Newtonova zákona síly vyvolává zrychlení $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}/m'$, které označujeme $\boldsymbol{a}_g$. Je tedy skutečně $\boldsymbol{a}_g=\boldsymbol{E}$. Jelikož Zemi můžeme považovat (alespoň v prvém přiblížení) za kouli, můžeme intenzitu gravitačního pole ve výšce h nad jejím povrchem vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \frac{M}{(R+h)^2}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{o}},$$

takže gravitační zrychlení je skutečně určeno vztahem (18.22). Pokud platí o výšce nad povrchem Země $h<<R$, to je v blízkém okolí Země, platí přibližně

závisí na zeměpisné poloze podle vztahu

$$g = g_o(1 + b\ \sin^2\alpha), \qquad (18.23)$$

kde g_0 je tíhové zrychlení na rovníku, g_0=9,7799 ms^{-2}, α je zeměpisná šířka *a* b=0,00346.

18.8
Tíha tělesa ***G*** hmotnosti m v blízkosti povrchu Země je

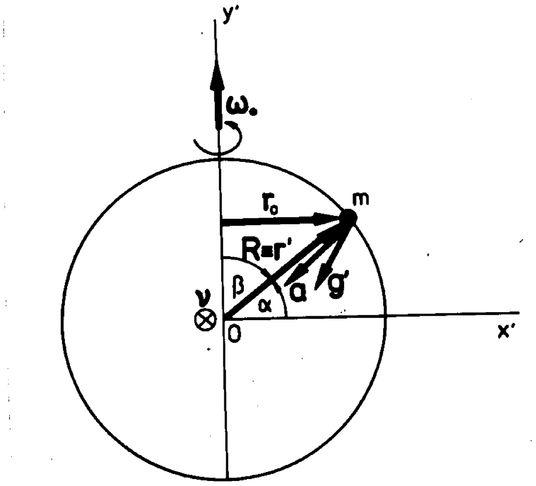
$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}, \qquad (18.24)$$

kde ***g*** je tíhové zrychlení.

Tíhové zrychlení *g* můžeme změřit pomocí matematického kyvadla

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}, \qquad (18.25)$$

kde *l* je jeho délka a *T* je doba jeho kmitu.



Obr. 18.3 K odvození závislosti tíhového zrychlení na zeměpisné poloze

$$a_g = E \doteq -\varkappa \frac{M}{R^2} = konst. \qquad (18.26)$$

V blízkém okolí Země padají všechna tělesa velmi přibližně s konstantním zrychlením. Zrychlení ***a***=*g*=***E*** je absolutní zrychlení. Toto zrychlení by naměřil pozorovatel na Zemi, kdyby se Země nepohybovala. V takovém případě by všechna volně padající tělesa v libovolném místě na zeměkouli padala se stejným zrychlením a směřovala by do jejího středu. Ve skutečnosti pozorovatel pevně spojený s povrchem Země měří zrychlení ***g***', které nazýváme tíhové zrychlení, které závisí na zeměpisné poloze a pro n∫ platí podle vztahu (10.26)

$$\boldsymbol{g}' \equiv \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\omega_o} x(\boldsymbol{\omega_o} x \boldsymbol{r}') = \\ = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{\omega_o} x \boldsymbol{r}') x \boldsymbol{\omega_o}, \qquad (18.27)$$

v kterém jsme zanedbali Coriolisovo zrychlení a uvážili, že $\boldsymbol{\omega}_0$=konst v. Zavedeme-li označení z obr. 18.3 můžeme psát ($\boldsymbol{\omega}_0$ x ***r***' = ω_0 r' sin ß ***υ***)

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{a} + \omega_o r' \sin\beta(\nu\, x\, \omega_o) = \boldsymbol{a}$$

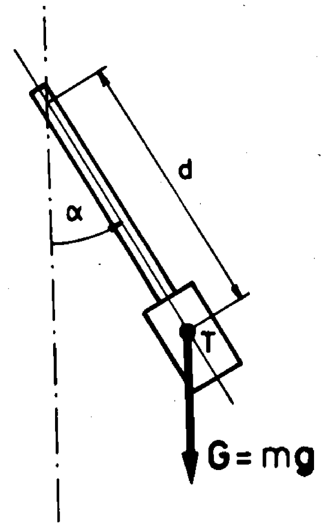
Velikost vektoru tíhového zrychlení ***g***' je tedy

$$g' = (\boldsymbol{g}' . \boldsymbol{g}')^{\frac{1}{2}} = \\ = \left(a^2 + \omega_o^4 r_o^2 - 2a\omega_o^2 r_o \cos\alpha\right.$$

Porovnáním členů a^2 a $\omega_0^4 r_0^2$ zjistíme, že druhý z nich je podstatně menší. Při jeho zanedbání dostaneme přibližný vzorec pro tíhové zrychlení

$$g' \doteq a\left(1 - \frac{\omega_o^2 r_o}{a}\cos\alpha\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vzhledem ke shora uvedenému předpokladu je



Obr. 18.4 Fyzikální kyvadlo

druhý člen v závorce značně menší než jedna, proto využijeme-li přibližný vztah $(1\text{-}x)^{1/2} \doteq 1\text{-}x/2$, dostaneme vztah

$$g' \doteq a\left(1 - \frac{\omega_o^2 r_o}{a}\cos\alpha\right) = a - r_o$$
$$= a - R\omega_o^2 \cos^2\alpha\,,$$

protože r_0=*R cos* α, kde *R* je poloměr Země. Na rovníku je *cos* α=2, takže $g'=g_0=a-\omega_0^{\,2} R$, neboli $a=g_0+\omega_0^{\,2} R$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} g' &= g_o + \omega_o^2 R(1 - \cos^2\alpha) = g_o + \omega_o^2 R\ \sin^2\alpha = \\ &= g_o(1 + b\sin^2\alpha)\,, \end{aligned} \qquad (18.28)$$

kde $b=\omega_0^{\,2}R/g_0=0{,}00346$, kde jsme použili $\omega_0=7{,}292.10^{-5}$ rad s^{-1}, $R=6{,}36.10^{6}$ *m a* $g_0=9{,}7799$ ms^{-2}. Tím je vztah 18.23 dokázán. Pro jednoduchost nebudeme tíhová zrychlení označovat v dalším *g'* ale pouze *g*.

V okolí Země tedy padají všechna tělesa s tíhovým zrychlením *g*, které je slabou funkcí zeměpisné polohy. Odpovídající síla $G=m\,g = m\,g_o\,(1+b\,sin^2\,\alpha)$ nazývaná tíha je tedy rovněž v blízkém okolí Země přibližně konstantní a je pouze slabou funkcí zeměpisné polohy. Potenciální energii tíhovou tělesa hmotnosti m ve výšce h nad vztažnou hladinou pak můžeme vyjádřit i jednodušším vztahem

$$W_p = mgh. \qquad (18.29)$$

Gravitační zrychlení můžeme jednoduše měřit pomocí fyzikálního kyvadla. Fyzikální kyvadlo je každé těleso, které může vykonávat kyvadlový pohyb kolem některé osy. (Obr. 18.4). V těžišti tělesa působí tíha ***G***=*m****g*****,** která vytváří vzhledem k rotační ose kyvadla moment

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{d}\, x\, \boldsymbol{G}$$

jehož velikost je *M=d mg sin* α. Pro malé výchylky můžeme použít přibližný vztah sin $\alpha \doteq \alpha$, takže příslušný moment je

$$M = -mgd\alpha = -k\alpha\,.$$

Podle věty 13.15 moment síly tohoto charakteru vyvolává kyvadlový pohyb s periodou (vztah /13.24/)

$$T = 2\pi\left(\frac{j}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi\left(\frac{j}{mgd}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (18.30)$$

kde *J* je moment setrvačnosti tělesa.

Jestliže realizujeme kyvadlový pohyb pomocí masivní kuličky zavěšené na nehmotné niti délky *l*, máme tzv. matematické kyvadlo. Příslušný moment setrvačnosti je $J = ml^2$, takže pro periodu matematického kyvadla vychází

$$T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Gravitační zrychlení můžeme proto určit podle vztahu

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}.$$

18.4 Volný pád, svislý a šikmý vrh

Elementárním způsobem můžeme odvodit rovnice pohybu pro tzv. volný pád (věta 18.9), šikmý vrh (věta 18.10) a svislý vrh (věta 18.11).

18.9
Volný pád je rovnoměrně zrychlený pohyb, který vykonávají všechna tělesa volně puštěná v tíhovém poli. Rychlost a dráha volného pádu jsou určeny vztahy (věta 10.9)

$$v = gt \qquad (18.31)$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \qquad (18.32)$$

Vztahy (18.33) a (18.34) odvodíme z vektorových rovnic (10.11) jestliže uvážíme, že při zkoumaném pohybu je $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$. Příslušné vektory můžeme vyjádřit ve složkách $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, $v_{ox}\boldsymbol{j} = v_o \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + v_o \sin\alpha\, \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = v_x\,\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$, takže dostaneme rovnici

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = v_o\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v_o\sin\alpha\,\boldsymbol{j} - g$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} =$$

$$= (v_o\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v_o\sin\alpha\,\boldsymbol{j}).t - \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}.$$

Vynásobením těchto rovnic skalárně jednotkovým vektorem i a pak j dostaneme přímo rovnice (18.33)

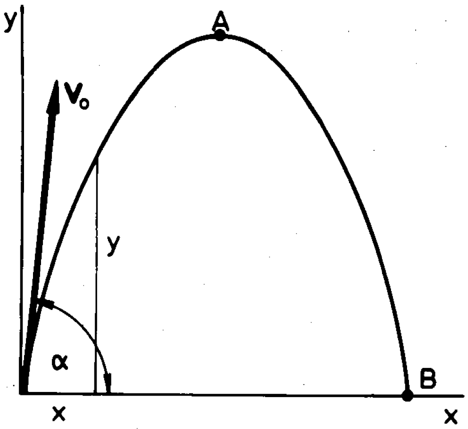
18.10

Šikmý vrh je pohyb, který vzniká v tíhovém poli při nenulové počáteční rychlosti v_o odlišné co do směru tíhové síly. Složky rychlosti a příslušné souřadnice dráhy (obr. 18.5) jsou

$$v_x = v_o \cos\alpha, \quad x = v_o t \cos\alpha,$$
$$v_y = v_o \sin\alpha - gt \tag{18.33}$$
$$y = v_o t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{18.34}$$

18.11

Svislý vrh je pohyb v tíhovém poli při počáteční rychlosti orientované ve směru tíhové síly, nebo proti ní. Rovnice tohoto pohybu dostaneme z rovnic (18.33) a (18.34) jestliže položíme $\alpha=\pm\pi/2$.



Obr. 18.5 Šikmý vrh

a (18.34). Eliminací času z rovnic (18.33) a (18.34) dostaneme rovnici dráhy

$$y = x\, tg\alpha - x^2 \frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha} = \\ = ax - bx^2 \tag{18.35}$$

z které vyplývá, že drahou uvedeného pohybu je parabola.

Dva významné body při šikmém vrhu jsou vrchol A a bod dopadu B. Tyto body jsou definovány podmínkami $v_y=0$ a $y=0$. Z nich dostaneme pro čas potřebný na dosažení vrcholu dráhy, resp. pro čas dopadu na vodorovnou podložku

$$t_A = \frac{v_o}{g} \sin\alpha$$

$$t_B = \frac{2v_o}{g} \sin\alpha = 2t_A.$$

Dosazením těchto časů do vztahů pro souřadnice zjistíme, že maximální výška šikmého vrhu je

$$y_A = \frac{v_o^2}{g} \sin^2\alpha - \frac{v_o^2}{2g} \sin^2\alpha = \frac{v_o^2}{2g} \sin^2\alpha \tag{18.36}$$

a dolet

$$x_B = \frac{2v_o^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\alpha \tag{18.37}$$

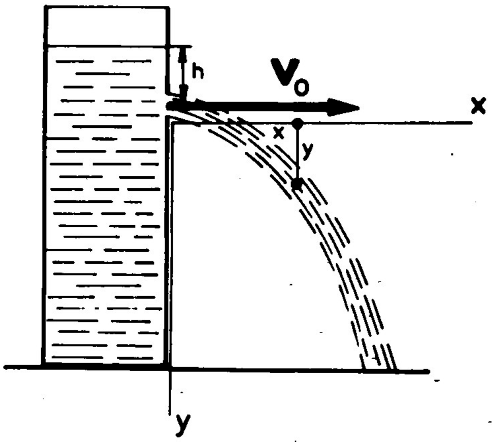
Největší výšku tedy dosáhne těleso při $\alpha=\pi/2$, to je při svislém vrhu ($y_{max}=v_o^2/2g$) a maximální dolet při $\alpha=\pi/4$ ($x_{max}=v_o^2/g$).

Odvozené vztahy platí však jen za ideálních podmínek, jestliže neuvažujeme odpor vzduchu, vliv větru a vliv setrvačných sil.

Častým případem šikmého vrhu je i tzv. vodorovný vrh (např. výtok kapaliny z nádoby otvorem ve stěně). V tomto případě je α=0, takže rovnice popisující tento pohyb mají tvar (obr. 18.6)

$$v_x = v_o \qquad x = v_o t \tag{18.38}$$

$$v_y = -gt \qquad y = -gt^2/2 . \tag{18.39}$$



Obr. 18.6 Vodorovný vrh (výtok kapaliny otvorem)

18.5 Kosmické lety

Význačnými pohyby v gravitačním poli jsou lety družic a kosmických korábů. V prvém případě se jedná o vystřelení tělesa takovou rychlostí a v takovém směru, aby se stalo umělou oběžnicí Země (nebo jiné planety) (věta 18.12), v druhém případě o vystřelení rakety takovou rychlostí, aby se mohla vymanit z gravitačního pole Země (věta 18.13). Nejdůležitější etapy kosmických letů zachycuje tabulka.

18.12
Prvá kosmická rychlost v_1 je taková počáteční rychlost tělesa při vodorovném vrhu ve výšce h nad povrchem Země (bez uvážení odporu vzduchu), která zabezpečí, že se těleso již nevrátí na Zemi a zůstane jeho oběžnicí po kruhové dráze. Je určena vztahem

$$v_1 = R\left(\frac{g}{R+h}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{18.40}$$

kde R je poloměr Země. Na povrchu Země je $v_1=(Rg)^{1/2} \doteq 7{,}9\ km\ s^{-1}$.

18.13
Druhá kosmická rychlost v_2 je taková počáteční rychlost tělesa vystřeleného ze Země, která mu umožní vymanit se z gravitačního pole Země. Je určena vztahem

Vztah (18.40) dostaneme jednoduše z podmínky, že při kruhovém pohybu tělesa hmotnosti m kolem Země ve výšce h nad povrchem musí být splněna podmínka daná Newtonovým zákonem síly $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{a}_n$ neboli $mE = m\ v_1^2/(R+h)$. Využijeme-li vztahu 18.22 $E=\mathcal{H}M/(R+h)^2$ a přibližného vztahu pro gravitační zrychlení $g=\mathcal{H}M/R^2$ (se zanedbáním vlivů způsobených rotací Země) získáme rovnici (obr. 18.7)

$$g\frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{v_1^2}{(R+h)},$$

z které již jednoduše vyplývá vztah (18.40).

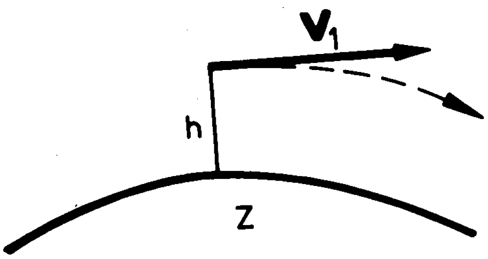
Druhou kosmickou rychlost nejrychleji odvodíme ze zákona zachování mechanické energie (18.20). Na povrchu Země je součet kinetické a potenciální energie $(W_p/\infty/\rightarrow 0)$ tělesa $W=W_{ko}+W_{po}=mv_2^2/2-\mathcal{H}\,Mm'/R$. Požadujme, aby těleso v limitním případě opustilo gravitační pole

$$v_2 = \left(\frac{2\varkappa M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq 11{,}2 \ km \ s \qquad (18.41)$$

kde M je hmotnost Země a R je její poloměr.

Významné kosmické lety:

4.10.1957	prvá umělá družice Země vypuštěná v SSSR.
12.1.1961	prvý let do kosmu - J.Gagarin na lodi Vostok 2.
5.5.1961	prvý americký kosmonaut ve vesmíru - A.Shepard na lodi Mercury 3.
12.8.1962	prvý skupinový let do kosmu - P.R.Popovič a A.G.Nikolajev na lodi Vostok 4.
16.6.1963	prvá žena v kosmu - V.V. Těreškovová na lodi Vostok 5
18.3.1965	prvá "procházka" v kosmu - A.A. Leonov vystoupil z lodi Voschod 2.
21.7.1969	první lidé na Měsíci - N.Armstrong a E.Aldrin, členové posádky Appolo 11.
31.7.1971	prvý elektromobil na Měsíci - D.Scott a J.Irwin, členové posádky Appolo 15.



Obr. 18.7 K odvození prvé kosmické rychlosti

2.3.1978	prvý čsl. kosmonaut ve vesmíru - V.Remek na lodi Sojuz 28

Země s nulovou rychlostí $r_2 \to \infty$, $W_k \to 0$, pak bude platit pro součet kinetické a potenciální energie W=0.

Porovnání obou výrazů pro mechanickou energii získáme rovnici

$$\frac{1}{2} m' v^2 - \varkappa \frac{Mm'}{R} = 0, \qquad (18.42)$$

z které bezprostředně vyplývá i vztah (18.41).

Někdy se definuje i tzv. třetí kosmická rychlost, která by měla postačit na únik ze sluneční soustavy. Vychází hodnota v_3 = 42 km s^{-1}. Jestliže uvážíme, že rychlost střely po opuštění hlavně nepřekračuje 1 $km\ s^{-1}$ vidíme, že prakticky žádné těleso nemůžeme přímým výstřelem dopravit mimo zemské, resp. sluneční gravitační pole. Můžeme toho docílit jen pomocí vícestupňových raket.

Zajímavá situace vzniká v takových případech, ve kterých úniková rychlost vychází větší než je rychlost světla. Z takové soustavy nelze žádným způsobem vyslat do okolí bez návratu žádné těleso (ani elektromagnetické záření). Ukázalo se, že takové soustavy ve Vesmíru existují a nazývají se černé díry.

18.6 Planetární pohyb

Planetárním pohybem nazýváme každý pohyb, který se uskutečňuje při účinku gravitační síly (18.1). Obecně se tedy jedná nejen o pohyb planet okolo Slunce, ale i např. o pohyb Měsíce a jiných planet, jak uvidíme později i pohyb elektricky nabitých částic kolem jiných elektricky nabitých částic. (Rotaci malých částic kolem jiných částic s větší hmotností nemůžeme uskutečnit, protože přitažlivé gravitační síly jsou v takových případech velmi malé, např. koule s hmotností M=100 kg a poloměrem r=1 m by přitahovala kuličku s hmotností m=1 g na svém povrchu silou jen asi F=10^{-11}N). Základní informace o planetárním pohybu poskytují věty 18.14 až 18.16.

18.14
Planetární pohyb je pohyb, který se uskutečňuje při působení centrální síly, jejíž velikost je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od nepohyblivého centra. Takovou silou je i gravitační síla.

18.15
Při všech planetárních pohybech je moment hybnosti

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \ x \ m\boldsymbol{v} = konst. \ vektor. \qquad (18.43)$$

Z této podmínky vyplývá konstantnost tzv. plošné rychlosti definované součinem 1/2 $\boldsymbol{r}$ x $\boldsymbol{v}$, což je obsaženo ve 2. Keplerově zákonu.

18.16
Dráhy planetárního pohybu jsou kuželosečky (kružnice, elipsa W<0, parabola W=0 a hyperbola W>0) určené rovnicí

$$\boldsymbol{r} = \frac{e}{1 - \left(1 + \dfrac{2eW}{\varkappa Mm}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi}.$$

$$m \ll M \qquad (18.44)$$

kde $e = \dfrac{b_o^2}{\mathcal{H} M m^2}$ a $|\boldsymbol{b}_o|=|\boldsymbol{r}_o x m \, \boldsymbol{v}_o|$ je absolutní hodnota vektoru momentu hybnosti, $W = W_k + W_p$ = 1/2 mv^2 - $\mathcal{H}$ mM/r = celková mechanická energie soustavy.

Rovnici planetárního pohybu dostaneme z Newtonova zákona síly $\boldsymbol{F}$=$m\boldsymbol{a}$, dosadíme-li za sílu $\boldsymbol{F}$=-$k\,m\,\boldsymbol{r}/r^3$, kde k=$\mathcal{H}M$ v případě gravitačního pole

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad (18.45)$$

Vynásobíme-li tuto rovnici vektorově vektorem $\boldsymbol{r}$, dostaneme rovnici

$$\boldsymbol{r}x\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -k\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{r}x\boldsymbol{r}) = 0, \qquad (18.46)$$

to je rovnici

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}x\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}x\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}x\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0, \qquad (18.47)$$

protože $d\boldsymbol{r}/dt$ x $\boldsymbol{v}$ = $\boldsymbol{v}$ x $\boldsymbol{v}$ = 0. Z rovnice (18.47) okamžitě vyplývá rovnice $\boldsymbol{r}$ x $\boldsymbol{v}$ = konst. vektor, a rovněž $\boldsymbol{r}$ x $m\boldsymbol{v}$ = $\boldsymbol{b}$ = konst. vektor.

Rovnice (18.45) je poměrně složitá diferenciální vektorová rovnice, která se dá rozepsat, vzhledem k tomu, že planetární pohyb je vždy rovinný pohyb, na dvě skalární rovnice. Dostaneme je tak, že vektor r rozepíšeme jako

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\rho + r\frac{d\rho}{dt} = \frac{dr}{dt}\rho + (\omega x \boldsymbol{r})$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\rho + \frac{dr}{dt}(\omega x \rho) + \frac{d\omega}{dt}x\boldsymbol{r} + \omega x$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r\right)\rho + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}\right)x$$

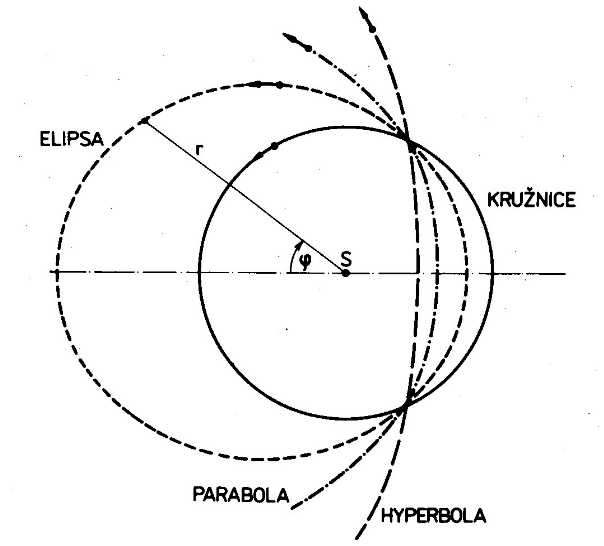
$$(18.48)$$

součin jeho velikosti a jednotkového vektoru $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{\rho}$ a najdeme příslušné derivace (10.22).

Jestliže toto vyjádření dosadíme do rovnice (18.45) a vynásobíme ji skalárně nejprve jednotkovým vektorem ρ, potom jednotkovým vektorem υ kolmým na ρ, dostaneme dvě skalární rovnice

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 = -\frac{k}{r^2} \qquad (18.49)$$

$$r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt} = 0. \qquad (18.50)$$



Obr. 18.8 Možné dráhy těles kolem Slunce (kružnice, elipsa W<0, parabola W=0, hyperbola W>0)

Je vidět, že jedním z možných řešení těchto rovnic je

$$r^3\ \omega^2 = konst,$$

i r=konst. V tomto případě je drahou planetárního pohybu kružnice. Jelikož tehdy je i ω=konst (což vyplývá z věty 18.15), je rovnice (18.50) identicky splněná. Z rovnice (18.49) vyplývá vztah

$$\frac{T^2}{r^3} = konst,$$

což je 3. Keplerův zákon.

Tím jsme dokázali, že i z 3. Keplerova zákona za předpokladu kruhové dráhy můžeme najít tvar Newtonova gravitačního zákona, i naopak, Newtonův zákon připouští kruhové dráhy planet a vyžaduje splnění Keplerova zákona. Tento zpětný postup, jak jsme již uvedli, je obecnější, protože rovnice (18.49) a (18.50) připouští i jiné dráhy jako kruhové. Můžeme ukázat, že těmto rovnicím vyhovují všechny kuželosečky vyjádřené rovnicí (18.44) (obr. 18.8).

O tom, která dráha se skutečně realizuje, rozhoduje hodnota celkové mechanické energie

$W = W_k + W_p = 1/2\ mv^2 - \mathcal{H}\ Mm/r$. Je-li splněna podmínka $W<0$ dráha je kruhová nebo eliptická, při $W=0$ je parabolická a při $W>0$ je hyperbolická.