

## 17. CHAOTICKÁ DYNAMIKA

Atraktorové systémy

Podivný atraktor

Diskrétní systémy

Reálné fyzikální systémy se od ideálních, o které jsme se doposud zajímali, liší hlavně tím, že do jejich dynamiky vstupuje také okolí. Jako příklad možno uvést pohyb za přítomnosti třecích sil. To může způsobit že se systém může dostat do zvláštních stavů, které se mohou také značně odlišovat od “klasického” chování např. tím, že představují chaos. S tím souvisí nemožnost predikce vývoje systému a to i proti tomu, že jsou přesně stanovené síly, které dynamiku zapříčinily. A také z tohoto důvodu je potřebné se těmito problémy zaobírat. Nejdůležitější poznatky z této oblasti stručně uvedeme v této kapitole.

### 17.1 Atraktorové systémy

V klasické mechanice nás zajímají systémy ve kterých je dynamika opsaná Newtonovými, resp. později Hamiltonem všeobecnými rovnicemi (tzv. Hamiltonovými rovnicemi). Jejich chování vykazuje zajímavou všeobecnou vlastnost a to, že “objem” vytvořený z diferencí souřadnic a hybností v tzv. fázovém prostoru nemění svoji velikost, jen tvar. Takové systémy se nazývají Hamiltonské. Reálné fyzikální systémy, o které se nyní budeme zajímat však takovou vlastnost nemají. Mnohé z nich se vyznačují tím, že příslušný objemový element ve fázovém prostoru se postupně zmenšuje a spěje do určité konečné podoby, která se přiléhavě nazývá atraktor. Příslušné systémy nazýváme atraktorové systémy a právě o takové se nyní budeme zajímat.

17.1

Vývoj všeobecných fyzikálních systémů můžeme napsat soustavou evolučních rovnic tvaru

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_i) \quad (17.1)$$

kde  $q_i$  je stavová charakteristika a  $f_i$  je všeobecně nelineární funkce.

Víme už, že základem dynamiky všech těles je Newtonův zákon síly, který můžeme napsat ve tvaru (pro nerelativistický případ)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = f \quad (17.5)$$

Ve složitějších případech se může vyskytnout i více takových rovnic (s charakteristickými proměnnými  $v_i$ ), proto je tvrzení 17.1 bezproblémové.

17.2

Systémy jsou atraktorové pokud je splněná podmínka

$$\sum \delta f_i / \delta q_i < 0 \quad (17.2)$$

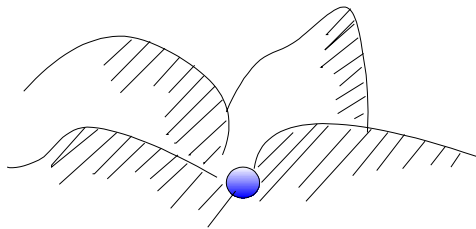
17.3

Ljapunovové exponenty jsou definované vztahem

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{y(t)}{y_0} \quad (17.3)$$

kde  $t$  je čas a  $y$  značí odchylku od stacionární hodnoty, t.j.

$$y = q - q^s \quad (17.4)$$



Obr.17.1 Bodový atraktor

Zůstaňme však na chvíli u nejjednoduššího případu, kde jde o pohyb jediného objektu. “Objem” elementu fázového prostoru příslušící dynamice opsaný soustavou rovnic definujeme všeobecně vztahem

$$\Delta \Omega = \Delta q_1 \Delta q_2 \dots = \prod \Delta q_i \quad (17.6)$$

v našem případě jediný objekt pohybující se rychlostí  $v$  bude tento element jednoduše

$$\Delta \Omega = \Delta v$$

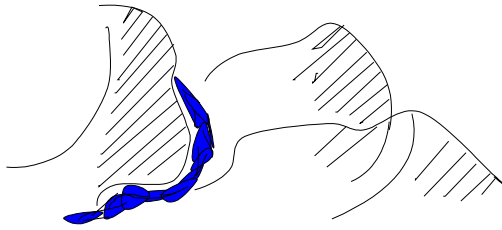
estliže si ho vyjádříme vztahem  $\Delta v = (\delta v / \delta v) \Delta v$ , můžeme napsat vztah

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\Omega}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\delta v}{\delta v} \Delta v = \\ &= \frac{\delta}{\delta v} \left( \frac{dv}{dt} \right) \Delta v = \Delta \Omega \frac{\delta f}{\delta v} \end{aligned} \quad (17.7)$$

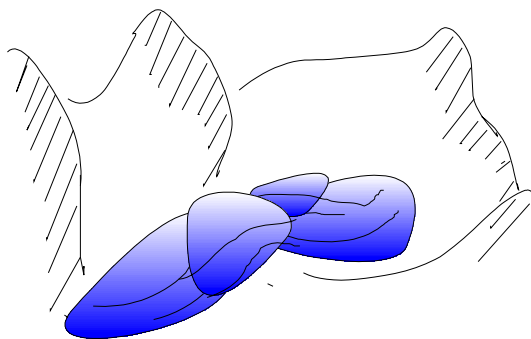
kde jsme provedli záměnu pořadí derivací. Vztah (17.7) má jednoduchou interpretaci : jak platí podmínka  $\delta f / \delta v = 0$ , “objem” ve fázovém prostoru se zachovává, protože v takovém případě je  $d(\Delta\Omega) / dt = 0$ . Takový případ vznikne tehdy, kdy  $f \neq f(v)$ . To je případ Hamiltonských systémů. Kdyby jsme však zkoumali pohyb tohoto stejného tělesa v brzdícím médiu ( např. ve viskózní kapalině), kde sílu  $f$  lze vyjádřit ve tvaru

$$f = f_0 - \alpha v \quad (17.8)$$

kde  $\alpha$  je konstanta tření, potom je  $\delta f / \delta v = -\alpha < 0$ , což značí, že “objem” ve fázovém prostoru se s časem zmenšuje a v dostatečně dlouhém čase dostane definitivní podobu (v našem případě  $\Delta v = 0$ ).



Obr. 17.2 Čárový atraktor



Obr. 17.3 Plošný atraktor

Takový limitní obrazec se nazývá atraktor. Když se tyto úvahy zevšeobecní na více proměnných dostaneme podmínku existence atraktoru ve tvaru (17.2). Podle počtu nezávislých proměnných může mít atraktor podobu bodu, čáry, plochy atd. Názornou představu rozličných možných atraktorů poskytují obr. 17.1-17.3 (pro dynamiku dešťových kapek).

Celkem logicky vzato můžeme očekávat, že stav systému v atraktoru je "stabilní", co značí, že pokud se objeví nějaká malá porucha (fluktuace), ta spontánně zanikne. (Skutečně, když se kapka vody následkem nějaké fluktuace vychýlí z místa atraktoru, spontánně se vrátí na původní místo). Celý problém můžeme velmi účelně a prozřívavě formulovat také matematicky. Zůstaneme u našeho jednoduchého příkladu, který dynamiku popisuje rovnicí

$$\frac{dv}{dt} = f_0 - \alpha v \quad (17.9)$$

Stacionární stav je zřejmě určený podmínkou  $dv/dt = f_0 - \alpha v = 0$ , z které vyplývá pro ustálenou rychlost

$v^s = f_0 / \alpha$ . Porušíme nyní tuto hodnotu malou fluktuací vyjádřenou vztahem (17.4), t.j.  $y = v - v^s$ .

Dosažením do rovnice (17.9) dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{dt} = f_0 - \alpha v^s - \alpha y = -\alpha y$$

kterou řešíme funkcí

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} = y_0 e^{\lambda t} \quad (17.10)$$

jsme označili  $-\alpha = \lambda$ . Koeficient  $\lambda$  určený vztahem

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{y(t)}{y_0}$$

se nazývá Ljapunův exponent a jeho všeobecnou definicí představuje výraz (17.3). Vidíme, že fluktuace se v oblasti atraktoru vyjádřená funkcí (17.10) skutečně s časem utlumí a že Ljapunův exponent je v tomto případě v souladu s očekáváním opravdu záporný. Je však velké překvapení, že ne vždy to tak musí být. Takové případy budou obsahem následujícího článku.

## 17.2 Podivný atraktor, fraktál, deterministický chaos

V druhé polovině našeho století se ukázalo, že v rozporu s očekáváním vykazují některé atraktorové systémy anomální chování. Jejich atraktory jsou charakterizované také kladnými hodnotami Ljapunových exponentů a proto se chovají “podivně”. A proto dostali název “podivný atraktor”. Vidíme, že takové chování označuje chaotizaci systému charakterizovanou nemožností predikce jeho evoluce. Tyto poznatky jsou obsahem vět 17.4 -17.9

17.4

Podivný atraktor je atraktor kterého alespoň jeden Ljapunov je kladný, t.j.

$$\lambda > 0 \quad (17.11)$$

17.5

Systémy charakterizované podivným atraktorem se chovají chaoticky. Takový režim nazýváme deterministický chaos.

17.6

Sebepodobnost (selfsimilarity) je vlastnost systémů projevujících se tím, že na různé škále úrovni obraz jejich dynamiky vypadá stejně.

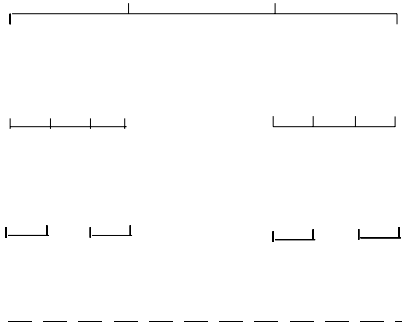
17.7

Systémy vyznačující se sebepodobností se nazývají “fraktálové” systémy. Základní motiv takových struktur je “fraktál”.

Z tvaru atraktorů znázorněných např. Na obr. 17.1-17.3 můžeme vydedukovat, že jim příslušné Ljapunovovy exponenty jsou záporné. V laické řeči to znamená, že všechny kapky vysunuté nějakými malými fluktuacemi z ustálené polohy se do ní spontánně vrátí. Jiná situace by však vznikla, kdyby se na dně jezírka nacházel nějaký vodotrysk.

Všechny kapky, které by se dostali do okruhu jeho působnosti, by byly vymrštěné a začaly by vykonávat chaotické a proto nepredikované pohyby. V matematické řeči tomu odpovídá

předpoklad, že alespoň jeden z Ljapunových exponentů má kladnou hodnotu. To má za příčinu



Obr. 17.4  
Cantorova množina

exponenciální nárůst každé fluktuace a protože těch je vždy prakticky nevyčísitelně mnoho, systém se takto “makroskopizací“ některé fluktuace dostane do stavu, který nemůžeme předvídat. Za této situace se deterministická dynamika mění na chaotickou. Na rozdíl od zmíněného jezírka, kde je za to zodpovědný vodotrysk, v tomto případě si to “systém” zavinil sám, protože kladná hodnota Ljapunovova exponentu vyplývá z deterministických rovnic opisujících jeho dynamiku. A proto se tento druh chaosu nazývá deterministický chaos. Samotný atraktor se v tomto případě nazývá “podivný” atraktor. Uvedené poznatky jsou obsahem vět 17.4 a 17.5.

V úsilí o bližší charakteristiku tvaru podivného atraktoru nám velmi pomáhá tzv. Poncarého mapa.

17.8

Kvantitativní charakteristikou fraktálních struktur je tzv. Neceločíselná dimenze ( Hausdorffova míra ) definovaná vztahem

$$\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^D \quad (17.12)$$

kde  $a_1$  a  $a_2$  jsou použité “měrky”  $N_1$  a  $N_2$  jsou počty elementů definované těmito měrkami, které jsou potřebné na pokrytí fraktálového útvaru.

17.9

Lorenzův chaotický systém je definovaný rovnicemi

$$\frac{dq_1}{dt} = \sigma(q_2 - q_1) \quad (17.13)$$

$$\frac{dq_2}{dt} = r q_1 - q_2 - q_1 q_2 \quad (17.14)$$

$$\frac{dq_3}{dt} = q_1 q_2 - d q_3 \quad (17.15)$$

kde  $\sigma$ ,  $r$  a  $d$  jsou charakteristické konstanty.

Kdyby jsme trajektoriím odpovídajících podivnému atraktoru postavili do cesty rovinu a všimli si rozložení jejich vzájemných průsečíků, dostaneme sled bodů, které matematici poznají pod názvem Cantorova množina. Její vznik ukazuje obr. 17.4 . Úsečku jednotkové délky rozdělíme na tři části a střední část vynecháme. To stejné potom libovolně několikrát opakujeme se zbytky. To co nakonec zůstane se nazývá Cantorova množina. Matematickým obrazem podivného atraktoru je tedy Cantorova množina. Pouhým pohledem na obr.17.4 zjistíme, že signifikantním znakem tohoto obrazu je “sebepodobnost“(selfsimilarity).

Struktury vykazují na rozličné škálové úrovni stejný profil. A také klubko trajektorů tvořící podivný atraktor má tuto vlastnost - při pohledu z různých vzdáleností poskytuje stejný obraz. (V této souvislosti jako příklad často uvádí pobřeží Norska - z různé výšky poskytuje stejný obraz.)

Základní motiv sebepodobných struktur se nazývá fraktál a příslušné struktury jsou fraktálové struktury ( věta 17.7). Matematici zavedli velmi užitečnou kvantitativní míru takových struktur.

Nazývá se neceločíselná dimenze (Hausdorfova míra, věta 17.8). Vzorec (17.12), který ji definuje, můžeme si objasnit takovou úvahou:

Kdyby jsme měli změnit délku nějaké nepříliš členité čáry, můžeme použít rozličné měrky, např. centimetr a metr. Počet naměřených metrů by byl zřejmě stokrát menší než počet naměřených centimetrů, proto by platila rovnice

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (17.16)$$

kde  $a_1$  a  $a_2$  jsou příslušné měrky. Kdyby však příslušná čára byla příliš členitá, tato míra by už neplatila - při měření větší měrkou se totiž můžou překlenout záhyby, které při použití menší měrky měření neuniknou. V těchto případech platí vztah (17.12) a koeficient  $D$  se nazývá fraktální dimenze. Má neceločíselné hodnoty.

Jedním z nejznámějších chaotických systémů je tzv. Lorenzův systém popisující dynamiku klimatologických systémů. Jsou to rovnice (17.13-17.15), kde  $q_1$ ,  $q_2$  a  $q_3$  jsou stavové charakteristiky. Vidíme, že je to atraktorový systém, protože v něm platí podmínka

$$\sum \frac{\delta f_i}{\delta q_i} = -(\sigma + 1 + b) < 1 \quad (17.17)$$

t.j. podmínka (17.12). Počítačovou analýzou lze dokázat, že jeden z Ljapunových exponentů má kladnou hodnotu, takže příslušný atraktor je podivný a z toho vyplývá, že klimatologické systémy "pracují" v režimu deterministického chaosu. To má za následek, že dlouhodobá předpovědi počasí není a nikdy nebude možná.

Na obr. 17.5 je znázorněný podivný atraktor Lorenzova systému.

### 17.3 Diskrétní systémy

V předcházejícím článku jsme ukázali, že systém se může chaotizovat, když se jeho atraktor změní na podivný. Ukázalo se však, že to není jediný scénář přechodu na chaotický režim. Odlišný scénář přechodu na chaos objevil Feigenbaum zkoumáním diskrétních systémů, či tzv. systémů s posunutým časem popsaných logistickými rovnicemi. Tento problém je zajímavý i z hlediska konfrontace diskrétního a kontinuálního přístupu k popisu přírodních procesů. Ukázalo se, že mezi jejich závěry mohou být rozdíly.

#### 17.10

Systémy s posunutým časem jsou systémy, ve kterých se uskutečňují skokové změny v počtu subsystémů vždy po určitých časových intervalech. Jejich evoluci můžeme popsat v rovnici

$$q_n + 1 = f(q_n) \quad (17.18)$$

kde  $q_n + 1$  charakterizuje stav v  $n + 1$ -ním a  $q_n$  v  $n$ -tém kroku.

#### 17.11

Verhulstova logistická rovnice má tvar

$$q_n + 1 = \lambda q_n (1 - q_n) \quad (17.19)$$

kde  $\lambda$  je charakteristická konstanta.

#### 17.12

Pro hodnoty z intervalu  $1 < \lambda < 3$  je konečným stabilním stavem systému popsaného v rovnici (17.19) stav

$$q_\infty = 1 - 1/\lambda \quad (17.20)$$

pro hodnoty  $\lambda > 3$  splňující relaci

Všechny procesy v přírodě mají v principu diskrétní povahu, protože jak látka tak její pole mají diskrétní strukturu. I přes to se je snažíme napsat pomocí diferenciálních rovnic, t.j. volíme kontinuální přístup. Otázka je zda se tím nedopustíme nedovolené aproximace. Přezkoumáním tohoto problému je výhodné uskutečnit na systémech, ve kterých se diskrétnost dostatečně zřetelně projevuje. Takovými jsou např. biologické systémy, ve kterých se odehrávají skokové změny v počtech "narozením" potomků. Vzhledem na samozřejmou platnost pravidla, že čím víc je rodičů, tím víc je také potomků, můžeme evoluční rovnici takového systému v prvním přiblížení napsat ve tvaru

$$q_n + 1 = \lambda q_n \quad (17.22)$$

Kde  $\lambda$  je určitá konstanta. Pro  $\lambda > 1$  vede taková rovnice exponenciálnímu nárůstu počtu subsystémů, aby se systém po určitém čase saturoval, zavedl Verhulst do evoluční rovnice "tlumící" člen tvaru  $(1 - q_n)$ , čímž vznikla rovnice (17.19). V níž už veličina  $q$  značí jen relativní počet subsystémů, protože  $q_n < 1$ . Takto popsaný systém skutečně spěje k saturaci vyjádřené hodnotou (17.20), která vyplývá přímo z rovnice (17.19) použitím podmínky

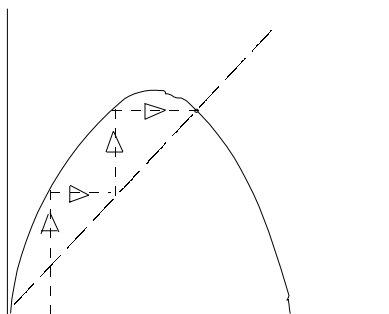


$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1} - 1}{\lambda_n + 1 - \lambda_{n-1}} = F = 4,66 \quad (17.21)$$

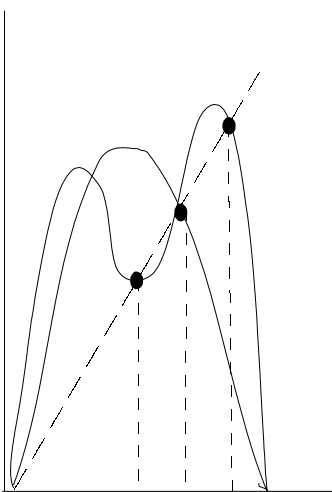
kde  $F$  je tzv. Feigenbaumovo číslo, tam se limitní stavy zdvojnásobují.

17.13

Pro hodnoty  $\lambda = \lambda_{\text{krit}} = 3,569$  nastupuje v systémech chaos.



Obr.17.6 Grafický obraz funkce ( 17.19)



Obr. 17.7 Evoluční křivka pro  $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$

$$q_n + 1 = q_n$$

Rovnici (17.19) můžeme snadno přetransformovat také do podoby diferenciální rovnice. Jestliže si zvolíme časový “krok” velikosti  $e$  (rovnající se časovému intervalu mezi dvěmi skokovými změnami), můžeme veličinu  $q_n + 1$  vyjádřit ve tvaru

$$q_n + 1 = q_n + \frac{dq}{dt} e \quad (17.23)$$

Dosažením do rovnice (17.19) a zavedením nové proměnné  $u = qe$  dostaneme rovnici

$$\frac{du}{dt} = \frac{\lambda - 1}{e} u - \frac{\lambda}{e^2} u^2 \quad (17.24)$$

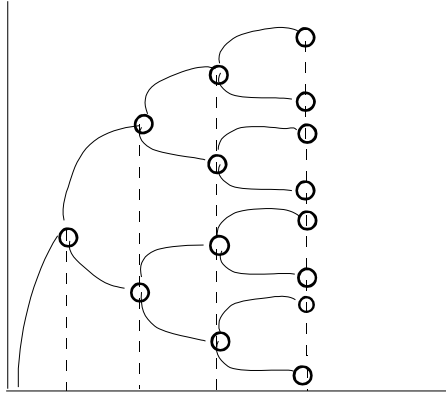
Její netriviální stacionární řešení je

$$u_\infty = \frac{e(\lambda - 1)}{\lambda} \quad (17.25)$$

takže  $q_\infty = 1 - 1/\lambda$ . Je tedy stejná jak v případě diskrétního přístupu, z čeho by se mohlo usuzovat, že oba dva přístupy jsou ekvivalentní. Metodou malých poruch vysvětlenou v předcházejícím článku můžeme lehce dokázat, že řešení (17.20) je stabilní pro všechny hodnoty  $\lambda > 1$ . Ten stejný postup aplikovaný na funkci (17.19), pokud v ní vyjádříme

$$\begin{aligned} q_n + 1 &= q_\infty + y_n + 1 \\ q_n &= q_\infty + y_n \end{aligned}$$

vede však k závěru, že uvedené řešení je stabilní jen pro interval  $1 < \lambda < 3$ . K jakému stavu však přispěje systém pro  $\lambda > 3$ ? Při řešení tohoto problému si můžeme pomoci samozřejmě požadavkem, že pro ustálený stav platí nejen



Obr. 17.8 Rozdvojování stavů a vznik deterministického chaosu v systémech popsaných v rovnici (17.19)

podmínka  $q_{n+1} = q_n$ , ale právě tak dobře i podmínka  $q_{n+2} = q_n$ ,  $q_{n+3} = q_n$

Z podmínek  $q_{n+2} = \lambda q_{n+1} (1 - q_{n+1})$   
 $q_{n+1} = \lambda q_n (1 - q_n)$

vyplývá kubická rovnice

$$q_n^3 - 2q_n^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) q_n - \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = 0 \quad (17.26)$$

Její průběh je znázorněn na obr. 17.7. uvedená rovnice má tři kořeny: jeden původní - ten je však už nestabilní - a dva nové, které jsou stabilní (jak to můžeme dokázat) až do hodnoty  $\lambda < 1 + \sqrt{6}$ . Systém si může v intervalu  $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$  vybrat (podle současné fluktuace) jeden z dvou dovolených stavů. Takové rozdělení pokračuje pro další charakteristické hodnoty řídicího parametru  $\lambda$  splňující vztah (17.21) (obr. 17.8), až do určité kritické hodnoty parametru  $\lambda$  rovnajícího se 3,569 jsou už všechny stavy dovolené, takže nastupuje deterministický chaos (Ljapunův exponent se stává kladným).

Vznik deterministického chaosu Feigenbaumovým mechanismem si můžeme ilustrovat názorným příkladem.

Představme si vagón na kolejích. Pokud se nachází v místě, ve kterých kolejnice nejsou rozdějené, má k dispozici jen jednu dovolenou stabilní polohu. Když se pomocí konkrétní (a na malé fluktuace reagující) výhybky může přesunout do míst, kde jsou kolejnice rozdějené, potom má už k dispozici dva stabilní stavy

Další rozdělování zdvojnásobuje počet dovolených stabilních stavů až do doby, pokud kolejnice nezmizí vůbec - potom už jsou všechny stavy možné a vagón se octne tam, kde ho usměrní fluktuace. Je zřejmé, že tento výsledný stav není predikovatelný.

Na závěr si můžeme položit otázku, zda někde v přírodě se můžeme setkat s takovým scénářem o vzniku chaosu. Experiment ukázal, že nejen v biologickém světě, kde je to úplně běžné, ale také v anorganické přírodě můžeme tento scénář spolehlivě potvrdit ( např. při pozorování chaotizace kapaliny umístěné mezi dva rolující válce). V poslední době se ukázalo, že také průběh některých chorob, např. leukémie a AIDS, zřetelně prokazují Feigenbaumův scénář o vzniku chaosu.

Deterministický chaos má v přírodě svoji nezastupitelnou úlohu, která nemusí být vždy negativní. Jeho pozitivní funkce spočívá v tom, že na jedné straně dovoluje vznik základních struktur (např. rostlin, zvířat a lidí), ale současně zabezpečuje, že všechny produkty mají svoje individuální rysy. Všechny sněhové vločky mají stejnou krystalickou strukturu a přece je každá jiná. To platí dokonce i pro duchovní sféru, t.j. pro oblast myšlení svobodného rozhodování a pod. Předpokladem těchto aktivit je chaotický režim činnosti mozku.

Pro oblast fyziky je důležité, že v současnosti se už vyskytuje řada problémů (nejvíce technického charakteru), kde se s chaotizací systémů aktuálně setkáváme, proto je potřebné chaotické dynamice věnovat přiměřenou pozornost.