ČÁST IV RELATIVISTICKÁ TEORIE POHYBU

Na začátku tohoto století se ukázalo, že klasická mechanika a teorie pole vyžaduje opravu, nebo lépe řečeno principiální přepracování: zjistilo se, že základní pojmy klasické fyziky, např. prostorová odlehlost, čas, hmotnost a další nejsou "absolutní", ale jen "relativní" veličiny, které závisí na pohybu souřadné soustavy, ve které je určujeme. Již Newton, i když prostor a čas chápal důsledně jako absolutní "kategorie", pravděpodobně intuitivně tušil, že hmotnost může záviset na pohybu, a proto svůj základní mechanický princip - zákona síly - formuloval velmi obezřetně (viz pozn. v článku 11.1). Závislost hmotnosti tělesa na rychlosti se projevuje až při velmi velkých rychlostech, které jsou v klasické mechanice makroskopických těles prakticky nedosažitelné. Tak se stalo, že téměř 300 let nebyly pozorovány žádné odchylky od zákonů klasické mechaniky. V mikrosvětě jsou však obrovské rychlosti běžné, takže při rozvoji bádání v mikrofyzikálních podmínkách se velmi rychle zjistilo, že s klasickou mechanikou "není něco v pořádku". Do doby, než věci dospěly do tohoto stadia, fyzici již měli prakticky připravené řešení. Uvedené jevy se totiž dostala na světlo v souvislosti s řešením vcelku akademického problému: je-li možné zjistit absolutní pohyb soustavy pomocí dějů, které v ní probíhají. Jestliže šlo o soustavy, které se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí, poskytla odpověď tzv. klasická, resp. speciální teorie relativity; soustavami, které se pohybují zrychlením se zabývá obecná teorie relativity.

Samotná odpověď na otázku, zda je možno zjistit absolutní pohyb soustavy pomocí dějů, které v ní probíhají, zajímalo jen málo teoretických fyziků, ale problémy, na které přitom narazili a které úspěšně vyřešili, měly obrovskou praktickou cenu. Lidstvo tyto muselo vzít na vědomí a dodnes je využívá a někdy i zneužívá.

Jak první polovina našeho století si vynutila inovaci fyziky s ohledem na teorii relativity , druhá jeho polovina též přinesla podněty pro další inovaci. Ukázalo se, že reálné fyzikální systémy si na určité úrovni svého vývoje začnou generovat zvláštní „pracovní režim'', který dostal název „deterministický chaos ''.Tento režim principiálně mění dorozumívání systémů a znemožňuje to, co klasická fyzika považovala za samozřejmost, a to že v systémech opsaných deterministickými rovnicemi je možná predikce jejich stavů v libovolném čase. Je potřebné i poznatky tohoto druhu organicky zakomponovat do struktury fyziky.

16 KLASICKÁ , SPECIÁLNÍ A OBECNÁ TEORIE RELATIVITY

Pokusy o stanovení absolutního pohybu soustavy
Speciální teorie relativity
Prostor a čas ve speciální teorii relativity
Relativistická formulace zákonů mechaniky - energie ve speciální teorii relativity
Relativistická transformace síly
Základní ideje obecné teorie relativity

V této kapitole budeme mít na mysli jen tzv. inerciální souřadné soustavy, které se vůči sobě pohybují konstantními rychlostmi. Problém vlivu pohybu soustavy na mechanické děje, které v nich probíhají vyřešil již Galilei. Vlivem pohybu soustavy na elektromagnetické děje (např. světlo) se prakticky i teoreticky pokoušela řada fyziků, až tento problém s konečnou platností vyřešil Einstein.

16.1 Pokusy o stanovení absolutního pohybu soustavy

Na prvý pohled se zdá být přirozené, že mechanické děje probíhají různě podle toho, probíhají-li v souřadné soustavě, která je v klidu, nebo v pohybu. Této odlišnosti by bylo možno zpětně využít ke stanovení pohybu souřadné soustavy, v které pozorovaný děj probíhá. Skutečnost je však jiná - ani mechanické, ani jiné (např. elektromagnetické) děje neumožňují stanovit, zda souřadná soustava je nebo není v (absolutním) rovnoměrném pohybu. V tomto článku se budeme zabývat důkazy tohoto tvrzení (věty 16.1 a 16.2).

16.1
Galileův princip relativity klasické fyziky: žádnými mechanickými ději sledovanými vzhledem k rovnoměrně se pohybujících, neboli inerciálních soustav, nemůžeme zjistit absolutní pohyb těchto soustav. Jinými slovy: všechny mechanické děje probíhají ve všech inerciálních soustavách stejně, protože základní pohybová rovnice (11.2) je "invariantní" vzhledem ke transformaci

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}t, \qquad (16.1)$$

která vyjadřuje rovnoměrný přímočarý pohyb soustavy. Transformace (16.1) se nazývá Galileova transformace.

16.2
Výsledek Michelsonova-Morlyeova (a řady dalších) pokusu: ani pomocí elektromagnetických dějů nemůžeme zjistit absolutní pohyb soustavy.

16.3
Maxwellovy rovnice (jsou to rovnice popisující elektromagnetické pole; bližší v kapitole 22) jsou invariantní vzhledem k tzv. Lorentzovým transformacím, které mají pro pohyb soustavy *S*' ve

$$\begin{aligned} x' &= \beta\,(x - vt), \\ x &= \beta\,(x' + vt') \end{aligned} \qquad (16.2)$$

směru osy x rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem k soustavě *S* tvar

Uvažujme o dvou inerciálních souřadných soustavách *S* a *S*', a předpokládejme, že *S* se vůči *S* pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ (obr. 16.1). Poloha libovolného bodu vzhledem k pohybující se soustavě *S*' je určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}'$, vzhledem k pevné soustavě *S* vektorem $\boldsymbol{r}$, pro který platí

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}t, \qquad (16.4)$$

kde *t* je čas. Pohybová rovnice hmotného bodu v soustavě *S*' je dána II.Newtonovým zákonem

$$\vec{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}. \qquad (16.5)$$

Jelikož síla $\boldsymbol{F}$ je stejná v obou soustavách, je pohybová rovnice vyjadřující stejný pohyb ale vzhledem k pevné soustavě *S'*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = m\frac{d^2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)}{dt^2} = \\ = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}m. \end{aligned} \qquad (16.6)$$

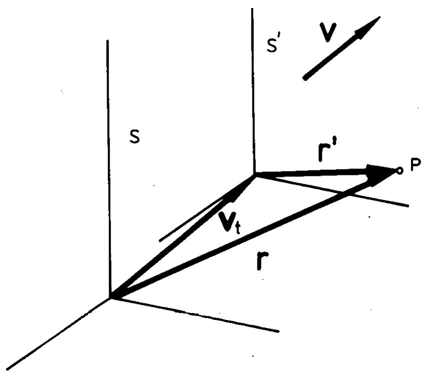
Vidíme, že pozorovaný děj je v pohyblivé soustavě *S*'(*r*) i v pevné soustavě *S*(*r*) popsán stejnými rovnicemi. Tuto skutečnost vyjadřujeme tvrzením, že rovnice (16.5) - II.Newtonův pohybový zákon - je invariantní vzhledem ke Galileově transformaci (16.4). Z toho vyplývá, že rovnoměrný a přímočarý pohyb soustavy nemá žádný vliv na popis

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

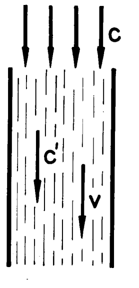
$$t = \beta\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right),$$

$$kde$$

$$\beta = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} . \qquad (16.3)$$



Obr. 16.1 Vzájemný pohyb dvou souřadných soustav



Obr. 16.2 Šíření světla v pohybujícím se prostředí

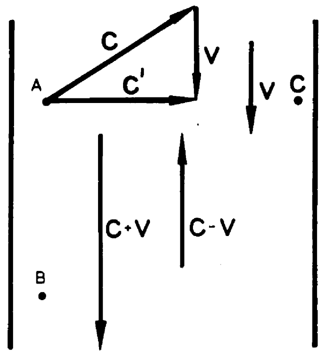
mechanických dějů v této soustavě a naopak, pomocí mechanických dějů probíhajících v určité soustavě nemůžeme zjistit, zdali je tato soustava v klidu, nebo se rovnoměrně přímočaře pohybuje. Tyto závěry jsou obsahem tzv. klasické (Galileovy) teorie relativity a jsou obsaženy ve větě 16.1.

Když selhaly mechanické děje, fyzici obrátili svou pozornost na elektromagnetické děje, konkrétně na světlo. Již Dopplerův jev (závislost frekvence signálu na vzájemném pohybu vysílače a přijímače) signalizoval, že pohyb soustavy by se mohl odrazit na některé veličině, charakterizující vlnění. Uvažovalo se následovně: světlo je vlnění určitého média - éteru. Tento éter se buď pohybuje spolu se Zemí, potom se však pohyb Země nemůže odrazit ve světelném vlnění, nebo éter stojí s Zem se pohybuje a v takovém případě se naskýtá možnost stanovit rychlost pohybu Země vůči "absolutně" nepohyblivému éteru. Připomeňme si, že v relativně krátkých časových intervalech se pohyb Země jeví jako pohyb inerciální soustavy.

Nejprve bylo tedy potřeba vyřešit otázku, zdali éter stojí, nebo se se Zemí pohybuje. Významným přínosem v tomto směru byly Fizeauovy pokusy, kterými dokázal, že v pohybujících se prostředcích (obr. 16.2) je rychlost světla c' jiná než v nepohyblivých c. Je určena vztahem

$$c' = c + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v, \qquad (16.7)$$

kde n je index lomu prostředí, v rychlost jeho pohybu. Při $n \to \infty$ je $c'=c+v$, takže éter je úplně prostředím "strháván". Při indexu lomu prostředí $n=1$ je však c'=c, takže éter není Zemí vůbec strháván, jelikož v atmosféře je přibližně $n=1$. Na základě tohoto výsledku bylo již možné přikročit k experimentálnímu ověření možnosti stanovení pohybu Země vzhledem k absolutnímu éteru.



Obr. 16.3 Analogie šíření světla v pohyblivé soustavě s plavcem plavajícím v řece

FIZEAU Armand Hippolyt (fizó), 1819-1896, fyzik francouzského původu, který změřil rychlost světla. Zkoumal zejména zákonitosti šíření světla v pohybujících se prostředích, stejně jako jevy polarizace a interference.

GALILEI Galileo, 1564-1642, italský fyzik, matematik astronom. Původně začal studovat filozofii, fyziku a medicínu, později se věnoval výhradně matematice a fyzice. Vlastnoručně zhotoveným dalekohledem provedl mnoho astronomických pozorování, při kterých objevil asi 500 nových hvězd, skvrny na slunci, morfologii povrchu Měsíce, čtyři nejvýznačnější měsíce Jupitera aj. Výsledky jeho astronomických pozorování ho přivedly k potvrzení Koperníkova učení o heliocentrické soustavě, zůstal vždy jejím zastáncem a propagátorem i když z přinucení inkvizice musel své názory veřejně odvolat. Galilei se intenzivně zabýval i mechanikou, řešil problém skládání pohybů, formuloval myšlenky o relativnosti pohybů (Galileiho princip relativity). Velký důraz kladl na matematické zpracování fyzikálních problémů a na harmonický vztah mezi teorií a experimentem a proto je považován za jednoho ze zakladatelů moderní přírodovědy.

Situace světla šířícího se ze zdroje ve směru pohybu Země, resp. proti němu se podobá plavci, který plave jednou ve směru toku řeky, podruhé proti němu (vzdálenost AB na obr. 16.3). V prvním případě má vzhledem k pevnému bodu na břehu řeky rychlost (c+v), ve druhém (c-v), takže na přeplavání vzdálenosti 2L (z bodu A do bodu B a zpět) potřebuje čas

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}. \tag{16.8}$$

Chce-li plavec přeplavat stejnou vzdálenost ve směru kolmém na řeku (vzdálenost AC), musí plavat v takovém směru, aby výslednice jeho rychlosti c a rychlosti řeky v směřovala kolmo na řeku (obr. 16.3). Plave tedy rychlostí (vzhledem k pevnému břehu) $c'=(c^2-v^2)^{1/2}$, proto na přeplavání stejné vzdálenosti 2L (z bodu A do bodu C a zpět) potřebuje čas

$$\Delta t' = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{16.9}$$

časy Δt a $\Delta t'$ nejsou tedy stejné. Jejich podíl je $\Delta t/\Delta t'=1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$. V našem případě nehybným břehem je éter, plavcem světlo a řekou Země. Dva paprsky (vlny) vyslané jednou ve směru pohybu Země a zpět a jednou kolmo k tomuto pohybu a zpět po stejných drahách získají určitý fázový rozdíl, který zjistíme např. interferencí (skládáním obou vln). Michelson postavil pro tento účel speciální interferometr (Michelsův interferometr), kterým chtěl dokázat, že světelné paprsky v uvedeném uspořádání skutečně nedorazí do bodu A za stejný čas, takže se původní interferenční obraz (vytvořený paprsky šířícími se jen stejným směrem) pozmění.

MICHELSON Albert Abraham (majkelzn), 1852-1931, americký fyzik, velmi nadaný experimentátor zabývající se téměř výhradně optikou. Záporný výsledek jeho slavného pokusu, který velmi přesně a za nejrůznějších podmínek provedl, definitivně vyřadil z fyziky absolutní pohyb a vyústil v princip konstantnosti rychlosti světla. Za celoživotní dílo mu r. 1907 udělili Nobelovu cenu ve fyzice.

Výsledek tohoto úsilí z roku 1880 byl však negativní, stejně jako výsledky pozdějších experimentů s Morleyem (1881, 1887 a 1904), měření s pomocí laseru (Townes 1965).

Jestliže výsledek měření nesouhlasí s teorií, potom může být chyba v předpokladech. Mohl by být nesprávný např. předpoklad o nepohyblivém etéru. Myšlenka etéru, pohybujícího se spolu se Zemí však byla v protikladu s důkladnými měřeními, které provedl Fizeao. Vývoj fyziky dospěl k nečekanémuzávěru -žádný etér neexistuje. Elektromagnetické pole nepotřebuje žádné speciální prostředí. Tím však pokusy Michelsona neztratily smysl, protože jak je možno lehce zjistit dosazením Maxwellovy rovnice §kap. 25) nebyly invariantní vůči Galileově transformaci a předpovídaly jiný průběh elektromagnetického vlnění v nepohyblivé S a pohyblivé S' soustavě. Podle toho by tedy bylo možné využít elektromagnetické záření, např. světelné, na stanovení absolutního pohybu souřadné soustavy. Negativní výsledky Michelsonova pokusu však tuto možnost kategoricky popřely a tím vlastně uvedly v pochybnost vlastní Maxwellovy rovnice.

V této chaotické situaci někteří fyzici popustili uzdu své fantazie a začali vymýšlet na tu dobu odvážné modely fyzikální reality, které se však později ukázaly nejen správné, ale hluboce intuitivní. Tak např. Fitzgerald přišel s nápadem, že negativní výsledek Michelsonova pokusu by bylo možno vysvětlit zkrácením všech délek pohybem v poměru $\Delta\ell/\Delta\ell'=ß=1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$. Chybnou předpověď Maxwellových rovnic chtěl zase Lorentz vysvětlit tím, že tyto rovnice jsou stejné v obou soustavách (a tím nepřipouští možnost stanovení absolutního pohybu), jen je nutno použít "správné" transformační vztahy při přechodu ze soustavy S do S'. Ne Galileovu transformaci (16.1), ale transformace vyjádřené vztahy (16.2) a (16.3). Důvod pro tuto náhradu nebyl jasný a navíc závislost časových "souřadnic" na prostorových a naopak byla v zásadním rozporu s představami o absolutním charakteru prostoru a času, proto ani Fitzferaldovy ani Lorentzovy pokusy o záchranu klasické fyzikální teorie nikdo nebral vážně. Fyzikální svět si na ně vzpomenul až po té, co Einstein vypracoval tzv. speciální teorii relativity, z které oba "násilné" zásahy do reality vyplynuly jako samozřejmý důsledek.

V současnosti jsme svědky určité obnovy "etéru" ve smyslu absolutní klidové souřadné soustavy. Jeho funkci převzalo tzv. reliktové (zbytkové) záření odpovídající teplotě asi 2,7 K, které rovnoměrně vyplňuje náš svět a je přímým pozůstatkem tzv. Big Bangu (velkého výbuchu), který se považuje za začátek existence světa v současné podobě. Vzhledem k této "klidové" souřadné soustavě se v poslední době udávají např. rychlost pohybu Země, Slunce, galaxie apod. "Absolutní" rychlost pohybu Země se zjišťuje měřením Dopplerova jevu, který vzniká následkem pohybu vůči reliktovému záření. Vychází hodnota asi (390±60) $km\,s^{-1}$.

16.2 Speciální teorie relativity

Často se celá zásluha o vybudování speciální teorie relativity připisuje A.Einsteinovi. Skutečnost je však taková, že v době, kdy se těmito problémy začal Einstein zabývat, bylo již všechno vlastně připravené, avšak ve směsi vzájemně rozporných faktů. Něco z toho bylo nutno povýšit na princip, něco zavrhnout. Ale co? Možností bylo několik. Mnozí (ještě i dnes) se domnívali, že Michelsonovy pokusy není nutno brát vážně, protože jsou nesmyslné. Geniální zásluha Einsteina je v tom, že povýšil na zákon to, co v té době vůbec nejevilo znaky fyzikálního zákona (jedná se o stejné hodnotě rychlosti šíření elektromagnetického vlnění ve všech inerciálních souřadných soustavách a dále nemožností stanovení absolutního pohybu) a zavrhl to, což bylo v té době považováno za neochvějný princip (absolutnost prostoru a času). Kdyby A.Einstein vykonal jen toto a tím by vnesl určitý pořádek do fyzikálních teorií, sotva by mu kdo uvěřil. Jenže nově formulované principy přinesly záhy výsledky, které bylo možno podstatně přesvědčivěji prokázat, než mohl Michelson prokázat výsledky svého experimentu. Tyto výsledky jsou v současné fyzice a technice široce (často i prakticky) využívané, proto považujeme Einsteinovu speciální teorii relativity (věta 16.4) za pravdivou a její objev za geniální čin. Některé další poznatky vyplývající ze speciální teorie relativity přinášejí věty 16.5 a 16.6.

16.4

Einsteinovy postuláty speciální teorie relativity:

I. Rychlost světla je ve všech inerciálních soustavách stejná.

II. Ani pomocí elektromagnetických dějů nemůžeme zjistit absolutní pohyb inerciální souřadné soustavy.

Ve všech inerciálních souřadných soustavách jsou fyzikální zákony invariantně formulovány.

16.5

Každou událost můžeme charakterizovat polohovým čtyřvektorem

$$\boldsymbol{r}^* = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + u\boldsymbol{i} = \boldsymbol{r} + u\boldsymbol{i}, \tag{16.10}$$

kde $u=\sqrt{-1}\,ct$ je souřadnice času, $\boldsymbol{r}$ je trojrozměrný polohový vektor a $\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor ve směru časové souřadnice.

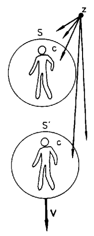
16.6

Kromě rychlosti světla je invariantní i tak zvaný čtyřrozměrný interval definovaný vztahem

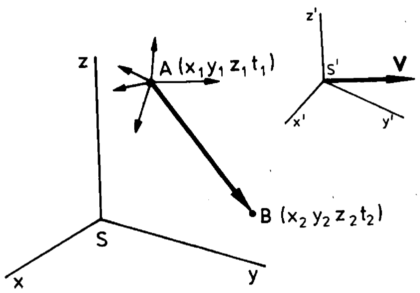
$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2. \tag{16.11}$$

Einstein vyšel z negativních výsledků Michelsonových pokusů a považoval je za důkaz toho, že světlo se šíří ve všech inerciálních soustavách stejnou rychlostí. Pozorovatel v soustavě *S* i pozorovatel v soustavě *S*', která se pohybuje vůči *S* rychlostí *v*, (obr. 16.4) naměří pro rychlost šíření světla ze zdroje Z stejnou hodnotu rychlosti. Je to sice proti "zdravému rozumu", ale kdyby tomu tak nebylo, musel by Michelson naměřit určité posuvy ve svých interferenčních obrazcích. Experiment byl pro Einsteina hlavním kriteriem pravdy. Rychlost světla je tedy relativistický invariant, protože má ve všech inerciálních soustavách stejnou hodnotu. To obsah prvého Einsteinova postulátu speciální teorie relativity.

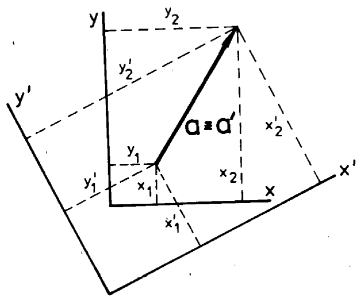
Experiment byl rozhodujícím kritériem i druhého Einsteinova postulátu. Neprojeví-li se absolutní pohyb souřadné soustavy na veličinách, popisujících elektromagnetické vlny, nemůžeme pomocí nich pohyb prokázat. Jak již víme, nedá se prokázat absolutní pohyb pomocí mechanických jevů. Jelikož kromě mechanických a elektromagnetických dějů neznáme další, které bychom při těchto experimentech mohli použít, musíme konstatovat, že absolutní pohyb souřadné soustavy se nedá vůbec dokázat. Reálně existující jevy však musí být přístupné měření - ať již přímému, nebo nepřímému. Z nemožnosti pozorování absolutního pohybu vůbec dedukoval



Obr. 16.4 Pozorovatelé ve všech inerciálních souřadných soustavách měří stejnou hodnotu rychlosti světla



Obr. 16.5 Znázornění dvou událostí v soustavě S a S'



Obr. 16.6 Znázornění invariantnosti absolutní hodnoty vektoru

LORENTZ Henrik Anton (lorenc), 1853-1928, fyzik holandského původu, nositel Nobelovy ceny za fyziku z r. 1902. Je tvůrcem na svou dobu pokrokové elektronové teorie o vzájemném působení elektromagnetického pole a nabitých částic, která umožnila vysvětlit mnohé důležité elektrické a optické jevy. Jeho lineární transformace v časoprostoru je nepostradatelnou součástí teorie relativity.

EINSTEIN Albert (ajnštajn), 1879-1955, rodák z

Einstein jediný rozumný závěr, že absolutní pohyb vůbec neexistuje. Každý pohyb je jen relativní, takže o pohybu má smysl hovořit jen v souvislosti se vztažnou soustavou.

Třetím postulátem Einstein zevšeobecnil invariantnost Maxwellových rovnic pro elektromagnetické vlny vůči Lorentzovým transformacím na všechny zákony fyziky. V dalším článku si pak všimneme, které z nám známých zákonů mechaniky vyhovují tomuto požadavku a které ne.

Avšak nejen pohyb ztratil povahu absolutnosti. Stejně musíme pohlížet na pojmy čas a prostor. Z Lorentzových transformací (16.2) a (16.3) vyplývá, že prostorové souřadnice a čas závisí na rychlosti relativního pohybu soustavy. Je tedy jasné, že všechny soustavy které se vůči vybrané vztažné soustavě pohybují různými konstantními rychlostmi, mají i svůj vlastní čas a svůj vlastní prostor definovaný čtveřicí údajů: třemi prostorovými souřadnicemi a jednou časovou souřadnicí. Jednotlivé události a jevy se stávají "body" ve fiktivním "čtyřrozměrném" světě. Body v čtyřrozměrném prostoru nazýváme světové body. Transformace mezi souřadnicemi světobodů v jednotlivých inerciálních soustavách představují Lorentzovy transformace, které vyplynuly (věta 16.3) z invariantnosti Maxwellových rovnic. Nyní si ukážeme, že vyplývají přímo i z Einsteinových postulátů.

Uvažujme o dvou událostech, které se odehrály v soustavě *S*, např. vyslání a přijetí světelného signálu (obr. 16.5). Vzdálenost $d=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$, kde $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=y_2-y_1$ a $\Delta z=z_2-z_1$ proběhne světlo za čas $\Delta t=t_2-t_1$ rychlostí *c*, proto platí rovnice

$$\Delta S=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2=0. \tag{16.12}$$

Pozorovatel v soustavě S' přiřadí podle II.Einsteinova postulátu těmto událostem

Ulmu (Německo). Po skončení studia na polytechnice v Zürichu a krátkém učitelování přijal z nutnosti zaměstnání na Patentovém ústavu v Bernu, kde setrval do r 1909. Prvým Einsteinovým příspěvkem k rozvoji fyziky byla teorie fotoelektrického jevu vycházející z Planckovy kvantové hypotézy a dopracována na kvantovou teorii elektromagnetického pole. I statické zpracování Brownova pohybu představovalo vědecký přínos. Revoluci ve fyzice však znamenala rozsahem nevelká práce publikovaná v r. 1905 pod názvem "O elektrodynamice pohybujících se těles", ve které zformulovla principy a důsledky speciální teorie relativity. Vážnost a mezinárodní uznání mu přinesla tato práce, která současně vyvolala i bouřlivé diskuse, změnila i jeho osobní život. Stal se profesorem teoretické fyziky postupně na různých vysokých školách (dva roky působil i na tehdejší německé univerzitě v Praze). Výsledkem jeho další intenzivní práce - jednotná teorie času, prostoru a gravitace - byla publikována v r. 1916. Obecná teorie relativity, vyjadřující naprostou rovnoprávnost všech vztažných souřadných soustav, se zařazuje mezi nejpozoruhodnější výtvory lidského intelektu všech dob. Celkově publikoval Einstein asi 300 vědeckých prací, z nich mnohé vypracoval již po svém odchodu z fašizmem ohroženého Německa. Nositelem Nobelovy ceny se stal r. 1921. Einsteinovým pracovištěm do konce života byla univerzita v Princetonu (USA). Jeho cílem na sklonku života bylo vypracování jednotné teorie pole, toho však již nedosáhl. V této době se významně zapojil do hnutí za udržení světového míru.

souřadnice x', y', z'a *t*'. I v'či němu se však světlo šíří stejnou rychlostí *c,* proto je správná i rovnice

$$\Delta S' = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 = 0 \tag{16.13}$$

Identicky platí tedy rovnice $\Delta S = \Delta S'$, protože pravé strany obou rovnic jsou rovny nule. Můžeme se však domnívat, že i v případě libovolných dvou událostí, kdy neplatí rovnice $\Delta S = \Delta S' = 0$, vždy platí

$$\Delta S = \Delta S'. \tag{16.14}$$

rovnost

Toto tvrzení se dokazuje různým způsobem. Jestliže vyjdeme například z požadavku invariantnosti Maxwellových rovnic a odvodíme tak Lorentzovy transformace, můžeme se o správnosti rovnice (16.14) přesvědčit přímým dosazením. Jestliže naopak přijmeme rovnici za správnou, můžeme z ní lehce odvodit Lorentzovy transformace. Obecná platnost rovnice (16.14) znamená, že jsme vlastně objevili další invariant, to je veličinu, která se při přechodu z jedné inerciální soustavy do druhé nemění. Veličina ΔS se nazývá čtyřrozměrný interval. Typickým invariantem v trojrozměrném prostoru je vektor. I když souřadnice jeho koncových bodů mají v různých soustavách různé hodnoty, vždy platí $|a|=|a'|$. Z důvodu názornosti je tato situace znázorněná v dvojrozměrném prostoru na obr. 16.6. Analogicky můžeme zavést i pro čtyřrozměrný prostor pojem vektoru, tzv. polohového čtyřvektoru, který má vlastnost invariantnosti v čtyřrozměrném prostoru. Jeho složky musí být s ohledem na definici intervalu vyjádřené veličinami:x, *y, z* $\sqrt{-1}\, ct$, takže jej můžeme napsat ve tvaru (16.11), v kterém vektor l značí jednotkový vektor ve směru časové osy.

Lorentzovy transformace (16.2) a (16.3) jsou odvozeny za předpokladu, že pohyb soustavy *S* ' je ve směru osy *x* a souřadnice *x*' se orientuje rovněž do tohoto směru. Za těchto podmínek není důvodu pro transformaci souřadnic *y* a *z*, takže je $y = y'$ a $z = z'$. Při vhodných volbách počátků souřadných os můžeme tedy

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2. \tag{16.15}$$

rovnici (16.14) napsat v jednoduchém tvaru
Hledejme nyní, jaké transformace vyplývají z této rovnice. Je jisté, že musí být lineární, proto je můžeme obecně psát

$$x' = Ax + Bt \tag{16.16}$$

$$t' = A'x + B't. \tag{16.17}$$

Abychom urychlili výpočet uvažme, že při rychlosti $v \rightarrow 0$ musíme přejít x' na x a t' na t. Z toho můžeme soudit, že konstanty A a B' jsou stejné A=B'. Pak rovnice (16.16) a (16.17) můžeme psát v jednodušším tvaru

$$\begin{aligned} x' &= A(x + Ct) \\ t' &= A(t + C't). \end{aligned} \tag{16.18}$$

Jestliže nějaká událost probíhá v počátku souřadné soustavy *S* (x'=0), x-ová souřadnice tohoto bodu je zřejmě $x = vt$. Tato podmínka definuje vzájemný pohyb soustav. Dosazením této podmínky do prvé rovnice (16.18) získáme okamžitě $C = -v$. Zavedením tohoto výsledku do rovnic (16.18) a jejich dosazení do rovnice (16.15) nám umožní výpočet konstanty *A* z rovnice

$$A^2(c^2 - v^2) = c^2$$

takže

$$A = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nakonec porovnáním koeficientů při xt v rovnici (16.15), která vznikne po dosazení rovnic (16.18) dostaneme i poslední neznámou konstantu $C' = -v/c^2$. Jestliže všechny nalezené konstanty dosadíme do rovnic (16.18), dostaneme Lorentzovy transformace pro přechod ze soustavy *S* ' do *S* ve tvaru

$$x' = \beta(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$kde \qquad \beta = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (16.19)$$

Podobným postupem bychom lehce získali i zpětné Lorentzovy transformace pro přechod ze soustavy S do S'

$$x = \beta(x' + vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \beta\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right).$$

16.3 Prostor a čas ve speciální teorii relativity

Speciální teorie relativity přinesla nové chápáví prostoru a času. Prostor už neexistuje "sám o sobě" jako jakási absolutně prázdná nádoba, ve které jsou umístěné všechny reálné předměty a ani čas již neplyne absolutně, nezávisle na žádných hmotných objektech. Obojí, to je prostor i čas jsou relativní veličiny a mají smysl jen v souvislosti se vztažnou soustavou. Vztažná soustava je však vždy vázána na hmotný objekt, proto i čas a prostor jsou jen vlastnostmi hmoty, nebo - jak říkají filosofové - jsou formami existence hmoty. Stejný objekt má různé rozměry a stejný děj různé časové trvání podle toho, z které souřadné soustavy provádíme měření. Prostor a čas jsou závislé na pohybu soustavy, nebo jinými slovy, prostor a čas se pohybem deformují. V této souvislosti hovoříme o tzv. kontrakci délky a dilataci času (věty 16.8 a 16.9). Ještě předtím se podívejme na vztahy převádějící některé kinematické veličiny (rychlost, zrychlení) při přechodu z jedné souřadné soustavy do druhé (věta 16.7).

16.7
Einsteinova věta o transformaci rychlosti: pohybuje-li se částice vzhledem k pohyblivé soustavě S' rychlostí u', je pozorovatelem v pevné soustavě naměřena rychlost

Předpokládejme existenci dvou vztažných souřadných soustav S a S' se dvěma pozorovateli, které se vůči sobě pohybují rychlostí v. Rychlost částic *T* měřená pozorovatelem v pevné soustavě S označme u a rychlost měřená pozorovatelem v pevné soustavě S'u'. Předpokládejme, pro jednoduchost, že rychlost v je orientovaná ve směru osy x a dále, že směry os x a x' jsou stejné. Věty o transformaci (skládání) rychlostí vyjádřenou ve větě 19.7. dokážeme pomocí Lorentzovy transformace pro převod ze soustavy S' do S (16.19). Jejich diferencováním získáme

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}},$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u' v}{c^2}}$$

(16.20)

kde v je rychlost soustavy S' vzhledem k soustavě S a platí $\mathbf{v}=v\mathbf{i}$. Opačná transformace má tvar

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

(16.21)

16.8
<u>Kontraktace délky</u>: délka tělesa $L_o=x_2-x_1$ je největší pro pozorovatele, který je vzhledem k tělesu v klidu. Pro každého jiného pohybujícího se pozorovatele je tato délka $L=x'_2-x'_1$ menší (nezáleží na tom, zda se pohybuje pozorovatel nebo těleso) $L<L_o$, přičemž platí

$$L = L_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

(16.22)

$$dx = \beta(dx' + v dt')$$
$$dy = dy'$$
$$dz = dz'$$
$$dt = \beta\left(dt' + \frac{v}{c^2} dx'\right).$$

(16.24)

Veličina $dx'/dt'=u'_x$ má význam x'-ové složky rychlosti částice T vzhledem k souřadné soustavě S' (obr. 16.7) a $dx/dt=u_x$ je x-ová složka rychlosti této částice vzhledem k soustavě S. Vydělením prvé a čtvrté rovnice (16.24) získáme přímo vztah mezi rychlostmi u a u'

$$\frac{dx}{dt} = u_x = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} =$$

$$= \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u_x}{c_2}},$$

což je prvý vztah (16.20). Ostatní vztahy (16.20) získáme obdobným způsobem, stejně jako vztahy (16.21) pro převod ze soustavy S do S'.

Tyto převodní vztahy mají zajímavé důsledky. Předpokládejme, že se těleso pohybuje v soustavě S' rychlostí $u'_x = 0{,}5c$ a soustava S' vzhledem k soustavě S rovněž rychlostí $v=0{,}5\,c$. Podle klasické teorie by byla výsledná rychlost pozorována pozorovatelem v pevné soustavě S $u=c$. Ve skutečnosti však naměří pouze $u=0{,}8$ c.

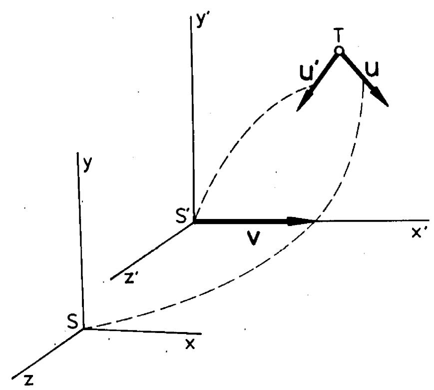
K odvození věty 16.8 si představme těleso např. tyč, jejíž osa bude splývat s osou x (obr. 16.8). Nechť je tyč vzhledem k soustavě S v klidu. Pozorovatel, který je vzhledem k ní rovněž v klidu určí její délku L_o změřením polohy jejích kde *v* je rychlost pozorovatele vzhledem k tělesu a platí $v=vi$.

16.9
<u>Dilatace času</u>: délka trvání děje probíhajícího v nějakém hmotném objektu (resp. časový interval mezi dvěma událostmi) je nejkratší pro pozorovatele, který je vzhledem k objektu v klidu, T_0. Pro každého jiného pohybujícího se pozorovatele je délka trvání děje T větší $T>T_0$, přičemž platí

$$T = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

(16.23)

kde *v* je rychlost pozorovatele k hmotnému objektu.



Obr. 16.7 K relativistické transformaci rychlosti

koncových bodů $L_0=x_2-x_1$. Sledujme nyní, jakou délku L změří pozorovatele, který je v klidu vzhledem k soustavě S', pohybující se vzhledem k soustavě S rychlostí *v*.

Použitím Lorentzovy transformace získáme

$$L_o = x_2 - x_1 = \beta[(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)] = \\ = \beta[L + v(t'_2 - t'_1)],$$

(16.25)

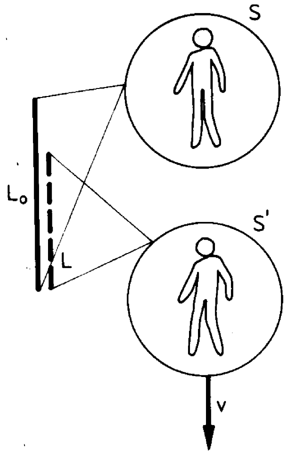
kde jsme označili $L=x'_2-x'_1$ délku tyče měřené pozorovatelem v S'.

Budeme požadovat, aby pozorovatel v S' stanovil polohu koncových bodů současně, tedy aby platilo $t'_2-t'_1=0$, což po úpravě umožní psát konečný tvar výrazu (16.22)

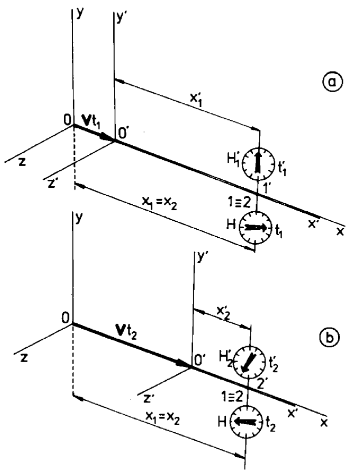
$$L = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Pozorovatel v S' naměří tedy délku tyče $L=L_0/\beta$. Jelikož $\beta>1$, je $L<L_0$, tyč se mu jeví jako zkrácená. Ke zkrácení došlo v důsledku pohybu, přesněji tím, že tyč, jejíž délku měří, se vůči němu pohybuje s rychlostí v. Je třeba poznamenat, že toto zkrácení je patrné jen při rychlostech blízkých k rychlosti světla a dále, že se netýká rozměrů kolmých na směr pohybu. Je však nutno zdůraznit, že tato kontraktace délky je reálný fyzikální jev související přímo s pohybem a že nemá nic společného se zmenšováním "zorného " úhlu, resp. s tím, že např. při skutečném měření fotografováním vznikne zkreslení rozměrů tím, že světlo přijde z koncových bodů objektu na fotografický film v nestejný čas.

Je rovněž zajímavé si povšimnout relativistických změn objemu těles. Za stejných předpokladů, ze kterých jsme vycházeli v předchozím, platí



Obr. 16.8 K relativistické kontrakci délek



Obr. 16.9 K relativistické dilataci času

MINKOWSKI Herman, 1864-1909, německý matemetik a fyzik. Zavedl geometrické metody do teorie čísel a rozpracoval matematické metody teorie relativity zavedením představy čtyřrozměrného prostoročasu.

$$V = V_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$t'_1 = \beta\left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right).$$

K odvození věty 16.9 předpokládejme dvě události (vážící se k určitému hmotnému objektu, který se nachází na jednom místě pevně v soustavě S, to je $x_1=x_2$) představující začátek a konec určitého časového intervalu $T_0=t_2-t_1$, měřeného pozorovatelem v soustavě S hodinami H. Sledujme, co zjistí o tomto časovém intervalu pozorovatel (mající k dispozici dvoje hodiny H'_1 a H'_2) v soustavě S', která se vzhledem k S pohybuje rychlostí v. V okamžiku t_1 měřeném na hodinách H, míjí tyto hodiny jiné hodiny H'_1 pevně umístěné v bodě x'_1 soustavy S' (obr, 16.9). Hodiny H'_1 ukazují podle (16.19) čas

V okamžiku t_2 měřeném na hodinách H míjí tyto hodiny další hodiny H'_2 pevně umístěné v bodě x'_2 soustavy S (obr. 16.9). Hodiny H'_2 ukazují čas

$$t'_2 = \beta\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right).$$

Spojením obou rovnic bude pro trvání děje v soustavě S'T

$$T = t'_2 - t'_1 = \beta T_o = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pro pozorovatele v soustavě S', který se pohybuje vůči pozorovanému ději rychlostí v, trvá děj déle než pro pozorovatele, který se nachází v soustavě S a vůči pozorovanému ději je v klidu. Jinými slovy pozorovateli, ktey se vůči pozorovanému ději pohybuje , plyne čas rychleji, než pozorovateli, který je vůči ději v klidu.

Je zajímavé si povšimnout, že v předchozím jsme hmotný objekt, u kterého jsme pozorovali geometrickou délku nebo čas určitého děje, pevně spojili se soustavou S. Vzhledem k relativnosti pohybu získáme zcela analogické výsledky, jestliže vyšetřovaný hmotný objekt pevně spojíme se soustavou S' a necháme pozorovat dvěma pozorovateli v soustavě S a S'. Tuto okolnost uvádíme proto, že se dotýká velmi často diskutované otázky "omládnutí" kosmonautů, nebo tzv. paradoxu dvojčat: jeden z dvojčat zůstane na Zemi, druhý odletí do kosmu a pohybuje se vzhledem k Zemi rychlostí v=0,99 c (ß=3). Vzniká otázka, zda po návratu na Zem bude mít skutečně kosmonaut o 20 let více, zatímco jeho bratr na Zemi o 60 let více. Odpověď na tuto otázku ovšem v oblasti speciální teorie relativity nelze nalézt. Naopak nás přivádí do rozporu, který dostal název "paradox dvojčat". Je-li totiž každý pohyb jen relativní, může ten z dvojčat, který zůstal na Zemi se stejným právem prohlásit, že u něho plyne čas rychleji, protože se vzhledem ke kosmické lodi pohybuje rychlostí v. Tento problém je možno vyřešit pouze tak, že se oba bratři sejdou a porovnají své hodinky. Jenže tento problém předpokládá i zrychlený pohyb soustavy s kosmickou lodí, který souvisí s návratem a přistáním. Dokonce i vlastní start rakety je pohyb zrychlený. Proto se k otázce paradoxu dvojčat může vyjádřit jen obecná teorie relativity. Jak uvidíme, skutečně dává přednost kosmonautovi, takže po návratu na Zem bude skutečně mladší než jeho bratr, který žil na Zemi. Obecná teorie relativity skutečně předpovídá zpomalení všech procesů v soustavách, které jsou v pohybu, (přesněji v pohybu se zrychlením), a to i biologických.

16.4 Relativistická formulace zákonů mechaniky - energie ve speciální teorii relativity

V předcházejícím článku 16.2 jsme úmyslně neupozornili na rozpor, který vznikl zavedením Einsteinových postulátů v souvislosti s mechanikou. Jsou-li totiž správné jen Lorentzovy transformace, potom je jich nutno používat i v mechanice místo Galileovy transformace. Problém je ale v tom, že základní zákon mechaniky - II.Newtonův zákon - napsaný ve tvaru $F=ma=m\ d^2r/\ dt$ není vzhledem k Lozentzovým transformacím invariantní, jak se můžeme lehce přesvědčit dosazením. Je možné jen dvojí řešení tohoto rozporu: buď je Newtonův zákon síly $F=ma$ správný, pak ale musí být možno pomocí mechanických dějů zjistit absolutní pohyb soustavy, anebo se tento pohyb nedá zjistit a Newtonův zákon $F=ma$ - a s ním i celá klasická mechanika - musí být chybné. Toto druhé řešení vypadalo velmi drastické, protože znamenalo zavrhnutí celé dokonalé stavby mechaniky, na kterou byli fyzici koncem 19. století velmi hrdí. Navzdory tomu se Einstein rozhodl pro toto druhé řešení, protože druhý postulát jiné nedovoloval. Šlo totiž jen o to, jak tady formulovat základní zákon mechaniky (a to za jakou cenu?), aby byl invariantní vzhledem k Lorentzovým transformacím. Výsledek byl přímo šokující - bylo nutno zákon síly formulovat tak, jak ho vyjádřil Newton ve své prvé práci o dynamice těles téměř před 300 lety. (Věta 16.10). Relativistické vyjádření energie je obsahem vět 16.11 - 16.13.

16.10
Relativistická formulace II.Newtonova zákona

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \tag{16.26}$$

kde p je hybnost částice a platí $p=mv$,

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{16.27}$$

V tomto výrazu je m hmotnost částice ve vztažné soustavě, v které se pohybuje rychlostí v a m_o je hmotnost částice v soustavě, v které se nachází v klidu (klidová hmotnost).

16.11
Kinetická energie částice ve speciální teorii relativity je určena vztahem

$$W_k = mc^2 - m_o c^2, \tag{16.28}$$

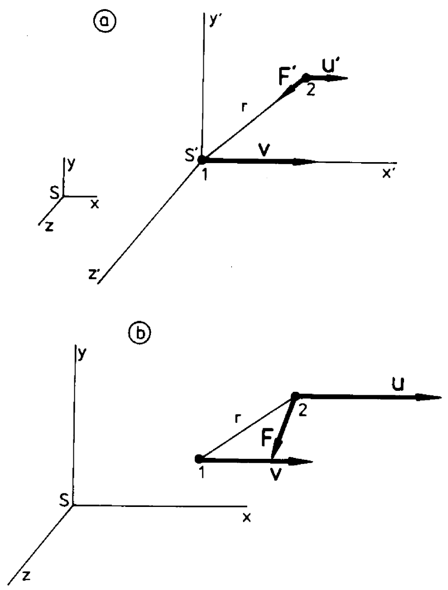
K nalezení relativistického tvaru II.Newtonova zákona (16.26) a (16.27) využijme (obr. 19.10). Pozorujeme pohyb tělesa ze dvou souřadných soustav S a S', které se vůči sobě pohybují rychlostí v, pohyb tělesa je možno charakterizovat vzhledem k soustavě S okamžitou rychlostí u a vzhledem k soustavě S' okamžitou rychlostí u'. Předpokládejme, že na těleso působí jen složka síly F_x (např. na elektron působí síla $F_x=eE$) a dále, že pohyb probíhá jen v ose x. Později dokážeme, že v tomto případě je síla v obou soustavách stejná ($F_x=F_{x'}$) (vztah 16.38). Stanovme derivaci součinu hmotnosti a rychlosti m'u' podle lokálního času t' v soustavě S'. Dostaneme (zde jsme označili hmotnost v soustavě S' znakem m')

$$\frac{d}{dt'}(m'u') = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dt'}(m'u'). \tag{16.31}$$

Podíl dt/dt' získáme diferencováním Lorentzovy transformace (16.19) $dt'=ß(dt-v/c^2\, dx)$, což po úpravě

$$\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{ß}\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^{-1}. \tag{16.32}$$

Pokud dosadíme do vztahu (16.31) vztah (16.32) a za rychlost u' podle vztahu (16.21) získáme kde *m* hmotnost částice a m_0 je klidová hmotnost částice.



Obr. 16.11 K relativistické transformaci síly

16.12

<u>Einsteinův zákon vzájemné vazby hmotnosti a energie</u>: každé hmotnosti m odpovídá enerige *W*

$$W = mc^2 .$$

(16.29)

16.13

Celkovou energii částice v relativistickém tvaru je možno vyjádřit vztahem

$$W = mc^2 = (m_o^2 c^4 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

(16.30)

kde *p* je pohyb částice.

$$\frac{d}{dt'}(m'u') = \frac{d}{dt}\left[\frac{m'}{\beta}\frac{u-v}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}\right].$$

(16.33)

Předpokládejme, že se těleso pohybuje tak, že jeho rychlost vůči soustavě S je zanedbatelná. V tom případě je $uv/c^2 \to 0$, rychlost u' nechť je však libovolná. V tom případě je $uv/c^2 \to 0$ a jelikož $dv/dt=0$, přejde rovnice (16.33) na tvar

$$\frac{d}{dt'}(m'u') = \frac{d}{dt}\left(\frac{m'}{\beta}u\right) .$$

Invariantní zápis (vzhledem k Lorentzově transformaci) vznikne tehdy, budeme-li výrazem $m'/ß$ považovat za hmotnost pohybujícího se tělesa vzhledem k soustavě S. Jelikož podle předpokladu je rychlost u limitně malá, je tato hmotnost totožná s hmotností v klidu m_0 a výraz $(d(m_0u)/dt=m_0$ a definuje sílu F_x, a levá strana předcházející rovnice definuje sílu F'_x. Tak dostaneme výsledek

$$\frac{m'}{\beta} = m_o$$

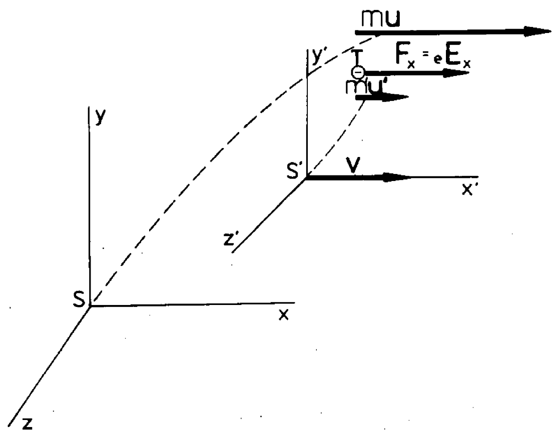
(16.34)

to je rovnici

$$m' = m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ,$$

stejně jako rovnice

$$F_x = \frac{d}{dt}(mu), \qquad F'_x = \frac{d}{dt}(m'u').$$



Obr. 16.10 K odvození relativistické formulace zákona síly

Vidíme, že vztah F=d(mu)/dt je invariantním zápisem zákona síly. Je možné ukázat, že toto tvrzení platí i tehdy, jestliže $F_x \neq F'_x$, to je když se jedná o obecný pohyb v prostoru.

Zápis základní rovnice mechaniky ve tvaru (16.26) je tedy skutečně invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Cenu, kterou jsme museli zaplatit za nalezení tohoto invariantního - a jedině správného - zápisu zákona síly je, že i hmotnost ztratila povahu absolutní veličiny a stala se z ní jen veličina relativní, to je závislá na pohybu soustavy. Tato závislost je určena vztahem (16.27) a byla v mikroskopických procesech tolikrát a tak dokonale prověřená, že celé teorii relativity dává punc naprosté věrohodnosti. V makrofyzice, kde i největší dosažitelné rychlosti jsou malé ve srovnání s rychlostí světla, jsou relativistické odchylky zanedbatelně malé, takže i nerelativistická fyzika tyto děje dokonale popisuje.

Kaufmann při měření měrného elektrického náboje elektronu e/m již v roce 1901 zjistil, že tento podíl závisí na rychlosti pohybu elektronu podle vztahu

$$\frac{e}{m} = K\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{16.35}$$

kde K je konstanta. Srovnáním se vztahem (16.27) zjistíme, že celá závislost podílu e/m na rychlosti v je podmíněna jen závislostí hmotnosti na rychlosti v. Z toho můžeme dedukovat, že elektrický náboj je relativistickým invariantem, to je ve všech inerciálních soustavách má, podobně jako rychlost světla, konstantní hodnotu.

Závěrem ještě jednou poznamenejme, že Newton svůj základní zákon dynamiky nenapsal ve tvaru $F=ma$, ve kterém se používal téměř 300 let, ale ve tvaru $F=d(mv)\ dt$, to je ve tvaru, na kterém nemusel Einstein nic změnit. Závislost hmotnosti na rychlosti daná vztahem (16.27) znamená, že rychlost světla je při pohybu těles a částic nedosažitelná. Při $v \rightarrow c$ je totiž $m \rightarrow \infty$, takže hmotnost by musela růst nade všechny meze a na další zvýšení rychlosti by byla potřebná nekonečně velká síla. Takové síly však v reálném světě neexistují.

K důkazu vět 16.11 a 16.12 použijeme definici kinetické energie (11.25) pro $W_{k1} \rightarrow 0$, ve ktré vyjádříme sílu podle vztahu (16.26)

$$W_k = \int_1^2 \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_1^2 \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}.d\boldsymbol{r} = \int_1^2 \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.d\boldsymbol{p} = \int_0^v \boldsymbol{v}.d\boldsymbol{p} = \int_o^v vdp = \int_o^v d(vp) - \int_o^v p$$

přičemž jsme využili vztah d(pv)=pvd+vdp. Předposlední integrál má hodnotu v.p a poslední integrál upravíme dosazením $p=mv=m_o$ßv. Pomocí substituce $w^2=1-v^2/c^2$ potom lehce dokážeme, že platí rovnice

$$\int_o^v p.dv = -\int_1^w m_o c^2 dw = m_o c^2 \left[1 - (1 - v^2/c^2)^{1/2}\right],$$

proto kinetická energie může být vyjádřena ve tvaru

$$W_k = mc^2 - m_o c^2, \tag{16.36}$$

což je vztah (16.28), který jsme měli odvodit. Tento výsledek říká, že těleso získalo energii $W_k = \Delta mc^2$, kde $\Delta m=m - m_o$ je přírůstek hmotnosti. Tento výsledek můžeme interpretovat i tak, že každé hmotnosti vůbec (tedy i klidové) odpovídá energie $W=mc^2$. To je obsah tvrzení 16.12. Tento zákon vzájemné vazby hmotnosti a energie naznačuje, že v látce je ukryto obrovské množství energie. Kdyby se nám podařilo uvolnit energii, kterou v sobě skrývá jen 1 *kg* hmotnosti, měli bychom pokrytou celoroční spotřebu elektrické energie v ČR. Nepatrná část této velké energie se uvolňuje při jaderných reakcích.

Výraz (16.36) je podstatně odlišný od výrazu pro kinetickou energii v klasické fyzice $W_k=1/2\, mv^2$. Budí to dojem, že tento vztah je principiálně nesprávný. Je to však jen zdání, protože pro malé rychlosti ($v/c<<1$) můžeme použít aproximaci $1/(1-x)^n \doteq 1+x/n$, to je v našem případě

$$m = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \doteq m_o\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right),$$

což dosazeno do rovnice (16.36) dává

$$m = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - m_o c^2 = m_o\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - m_o c^2 = \frac{1}{2} m_o v^2. \tag{16.37}$$

Pro malé rychlosti přechází tedy vztah (16.36) na klasické vyjádření kinetické energie $W_k=1/2\, m_o v^2$. Jelikož v mechanice makroskopických těles jsou všechny rychlosti "malé", je vztah (16.37) úplně postačující.

Velmi užitečný vztah (16.30) pro celkovou energii částice vyplývá přímo z Einsteinova vztahu (16.29)

$$W = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Povýšením této rovnice na druhou a menší úpravou dostaneme rovnici

$$W^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (m_o c^2)^2,$$

tj. rovnici

$$W^2 - p^2 c^2 = m_o^2 c^4,$$

z které již bezprostředně vyplývá vztah (16.30).

Shrneme-li závěry obou předchozích článků (věty 16.8, 16.9, 16.10 a 16.11) můžeme říci, že v klidové inerciální soustavě materiálního objektu je jeho hmotnost m_o a energie $W_o = m_o c^2$ nejmenší, jeho délka L_o a objem V_o největší a délka trvání děje T_o nejkratší v porovnání s obdobnými údaji zjištěnými v kterékoliv jiné inerciální souřadné soustavě, která se vůči klidové pohybuje rovnoměrně přímočaře.

16.5 Relativistická transformace síly

V předcházejícím článku jsme se zabývali transformačními vztahy pro hybnost, hmotnost a energii částice při přechodu z jedné souřadné soustavy do druhé. Přistupme nyní k odvození transformačních vztahů pro sílu, kterou na sebe budou působit dvě částice, které jsou v pohybu (věta 16.14).

16.14

Statická síla F mezi dvěma částicemi v soustavě S' se při přechodu do jiné vztažné soustavy S transformuje podle vztahu

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{u} x (\boldsymbol{v} x \boldsymbol{F}'), \qquad (16.38)$$

kde v je rychlost částice vytvářející pole a u je rychlost částice, na kterou působí síla F v soustavě

Budeme předpokládat, že v soustavě S se jedna částice (1), která vytváří libovolné fyzikální pole (gravitační, elektrické a jiné), pohybuje rychlostí v, přičemž platí $v \ll c$. Tuto částici necháme působit na jinou částici (2), která se pohybuje libovolnou rychlostí u přičemž $u < c$. Označme sílu mezi částicemi v soustavě S F a v soustavě S', kterou pevně spojíme s jednou částicí označme F' (obr. 16.11). Je důležité si uvědomit, že zatímco v soustavě S jsou obě částice (1 a 2) v pohybu, v soustavě S' pouze jedna z nich (2).

S.

Nejprve si všimněme vztahů pro transformaci rychlostí pro tento případ. Platí-li v<<c, přejdou rovnice (16.20) a (16.21) na jednoduchý tvar

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{u}'.\boldsymbol{v}}{c^2}}. \tag{16.39}$$

a

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}}{1 - \dfrac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{c^2}}. \tag{16.40}$$

Pro odvození transformačního vztahu síly využijeme požadavek naměnnosti (invariance) y a z složky hybnosti částice 2 při přechodu z S do S', $p_y = p'_y$ resp. $p_z = p'_z$ neboli $mu_y = m'u'_y$ resp. $mu_z = m'u'_z$, což s rovnicí (16.9) dává ($ú>>v$)

$$m = \left(1 + \frac{\boldsymbol{u}'.\boldsymbol{v}}{c^2}\right) m'. \tag{16.41}$$

Dále z rovnice (16.32) vyplývá pro v<<c, ß→1 neboli

$$\frac{dt'}{dt} = \left(1 - \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{c^2}\right). \tag{16.42}$$

Pro hybnost částice 2 v soustavě S pak můžeme psát

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = m\left(\frac{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{c^2}}\right) = m'\boldsymbol{u}' + m'v = \boldsymbol{p}' + m'\boldsymbol{v}. \tag{16.43}$$

Proveďmě derivaci hybnosti $\boldsymbol{p}$ podle času t' uvážíme-li, že $\boldsymbol{v}$=konstantní vektor

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'} + \frac{1}{c^2}\frac{d(m'c^2)}{dt'}\boldsymbol{v}. \tag{16.44}$$

Síla působící v soustavě S' je rovna $\boldsymbol{F}'=d\boldsymbol{p}'/dt'$ a celková energie částice v soustavě S' je rovna $W'=m'c^2$, takže můžeme psát

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt'} = \boldsymbol{F}' + \frac{1}{c^2}\frac{dW'}{dt'}\boldsymbol{v}. \tag{16.45}$$

Dále platí pro změnu celkové energie částice 2 v soustavě S'$dW'=\boldsymbol{F}'.d\boldsymbol{x}'$, kde $d\boldsymbol{x}'$ je vektor posunutí, nebo rovněž dW'/dt'=$\boldsymbol{F}'.\boldsymbol{u}'$, takže pro sílu **F**' můžeme psát s využitím posledního vztahu

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt'}.\frac{dt'}{dt} = \left[\boldsymbol{F}' + (\boldsymbol{F}'.\boldsymbol{u}').\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\right]\frac{dt'}{dt}. \tag{16.46}$$

S využitím vztahu

$$\boldsymbol{u}'dt'/dt = \frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}{1-\dfrac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{c^2}}.\frac{dt'}{dt} = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$$

a dále (16.46) lze psát

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'\left(1-\frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}}{c^2}\right) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}).\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}. \tag{16.47}$$

Odtud po zanedbání členu v^2/c^2 a po úpravě pomocí věty o vektorovém součinu tří vektorů $(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}).\boldsymbol{b}.(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}).\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\mathrm{x}(\boldsymbol{b}\mathrm{x}\boldsymbol{c})$ bude

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{u}x\ (\boldsymbol{v}\ x\ \boldsymbol{F}'), \qquad u<c, \qquad v\ll c. \tag{16.48}$$

Vztah (16.48) představuje vlastně transformaci statické síly **F**', působící mezi částicemi v soustavě S' na sílu dynamickou působící v soustavě S. Situaci si můžeme představit následovně. Částice 1, jejíž pole budeme transformovat, jsme spojili pevně se soustavou S'. V této souřadné soustavě bude existovat statické pole, které bude na libovolnou částici pohybující se rychlostí **u**' působit statickou silou $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}_S$. Přejdeme-li do soustavy S v níž zdrojová částice má rychlost **v**, bude stejnou částici, která se ale nyní pohybuje rychlostí **u**, působit celková síla $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_S+\boldsymbol{F}_L$, kde F_L je Lorentzova síla, která je dána velikostí a směrem rychlosti zdrojové hmotné částice **v** a rychlostí částice **u**, na níž pole působí.