15 MECHANIKA IDEÁLNÍCH TEKUTIN

Hydrostatika ideální kapaliny
Hydrodynamika ideální tekutiny

Na rozdíl od pevných látek, které zachovávají při pohybu svůj tvar, setkáváme se v přírodě s látkami, které naopak velmi lehce svůj tvar mění. Vyznačují se tedy vlastností, kterou nazýváme tekutost. Patří k nim plyny a kapaliny, které na základě uvedené vlastnosti nazýváme společně tekutinami. Podobně jako v případě pevné látky i zde si zavedeme představu ideální tekutiny, a to jako tekutiny s dokonalou tekutostí. Jinými slovy: ke změně svého tvaru nepotřebuje ideální tekutina dodat žádnou energii. Reálné tekutiny mají tuto vlastnost jen v omezené míře a těmito tekutinami se budeme zabývat v článku 39.3. V této kapitole si zformulujme základní zákony mechaniky ideálních tekutin, s ohledem na to, že při zkoumání tepelného pohybu jsme se v podstatě zabývali plyny, budeme mít nyní na mysli především kapaliny. U nich přistoupí jako další charakteristika ideálnosti tak zvaná nestlačitelnost. Problémy kapalin v klidu zahrneme do hydrostatiky, problémy jejich pohybu do hydrodynamiky. Jestliže však připustíme i stlačitelnost, budou odvozené výsledky platit i pro mechaniku plynů.

15.1 Hydrostatika ideální kapaliny

Do hydrostatiky zahrnujeme nejen problémy týkající se kapalin v klidu, ale i takové jejich pohyby, při kterých těžiště zůstává v klidu. Kapalina rotující s nádobou, nepohybuje-li se těžiště celého systému, řešíme rovněž v rámci hydrostatiky. Jelikož je kapalina tekutá, zaujímá při tomto pohybu tvar, který závisí na příslušném silovém poli - v daném případě na poli odstředivých a gravitačních sil (z hlediska neinerciálního souřadného systému, spojeného s kapalinou). Obě pole jsou příkladem potenciálového pole, proto základním problémem hydrostatiky je formulování rovnováhy kapaliny za přítomnosti potenciálových polí. Základní pojmy a zákony jsou obsažené ve větách 15.1-15.4.

15.1
<u>Základní zákon hydrostatiky zní</u>: součet hydrostatického tlaku a potenciální energie jednotkového objemu kapaliny ρV je konstantní, to je

$$p + \rho V = konst, \qquad (15.1)$$

kde ρ je měrná hmotnost kapaliny a V je potenciál silového pole (definovaný větou 11.22).

15.2

Uvažujme o určitém množství ideální kapaliny (obr. 15.1), která se nachází v potenciálovém poli (např. v gravitačním poli, v poli odstředivých sil apod.), které je charakterizováno potenciálem V. Na každý element povrchu této kapaliny dS působí okolní kapalina silou

$$d\boldsymbol{F}_1 = -p d\boldsymbol{S},$$

takže na celou uvažovanou plochu ohraničující kapalinu působí síla

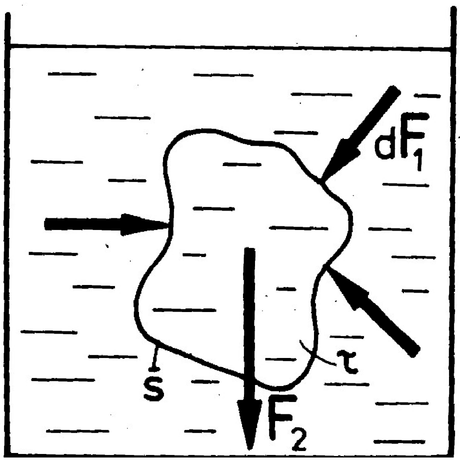
<u>Pascalův zákon</u>: tlak v kapalině se šíří všemi směry stejně ($p = konst$).

15.3

Rozdíl tlaků ve dvou bodech kapaliny je určen vztahem

$$p_1 - p_2 = \rho \, . (V_2 - V_1), \tag{15.2}$$

kde V_1 a V_2 jsou potenciály silového pole v místech 1 a 2.



Obr. 15.1 Myšlený uzavřený objem kapaliny v silovém poli

ARCHIMEDES, 287-212 před n.l., řecký matematik a fyzik. Zabýval se zejména mechanikou, zavedl pojem těžiště a momentu síly. Vybudoval základy hydrostatiky. Objevil známý a po něm pojmenovaný zákon o nadlehčování těles ponořených do kapaliny.

$$\boldsymbol{F}_1 = - \oint_S p d\boldsymbol{S} . \tag{15.3}$$

Jelikož každý element kapaliny se nachází v silovém poli, působí na něj podle vztahu (11.28) síla

kde jsme potenciální energii W_p elementu s hmotností dm vyjádřili $W_p = \rho \, V \, d\tau$, kde $d\tau$ je

$$\boldsymbol{F}_2 = - grad \, W_p = - \rho \, (grad \, V) \, d\tau ,$$

element objemu a měrnou hmotnost ρ považujeme za konstantní v celém objemu. Celková síla silového pole je proto

$$\boldsymbol{F}_2 = - \int \rho \, (grad \; V) \; d\tau . \tag{15.4}$$

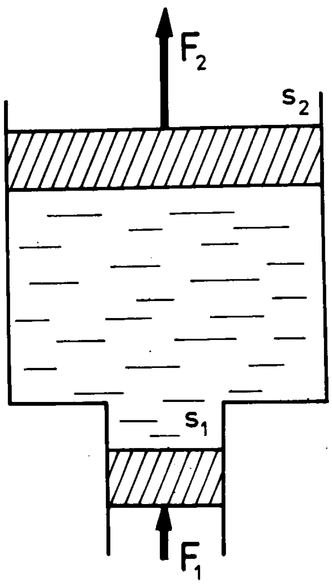
Podle věty o pohybu těžiště 12.5 se celková síla působící na zkoumanou kapalinu hmotnosti $m = \int \rho \, d\tau$ rovná součinu této hmotnosti a zrychlení

$$- \oint p d\boldsymbol{S} - \rho \int (grad \, V) \, d\tau = \\ = \boldsymbol{a} \int \rho \, d\tau . \tag{15.5}$$

těžiště a to je

Jestliže přetransformujeme prvý integrál na objemový využitím Gaussovy-Ostrogradského věty (7.7) dostaneme rovnici

$$- \int (grad p) \, d\tau - \rho \int (grad \, V) \, d\tau \\ = \boldsymbol{a} \int \rho \, d\tau ,$$



Obr. 15.2 Principy hydraulického lisu

z které vyplývá vztah

$$\rho\, \boldsymbol{a} = -grad(\rho\, V + p). \qquad (15.6)$$

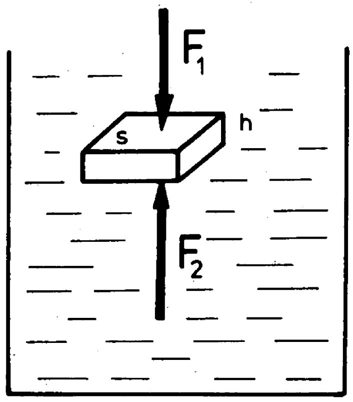
Jelikož jsme rovnováhu kapaliny definovali jako stav, v kterém se těžiště uvažovaného systému nepohybuje, je $a = 0$. Z rovnice (15.6) potom přímo vyplývá základní rovnice hydrostatiky ve tvaru (15.1). Z ní vyplývá několik všeobecně známých důsledků. Je-li např. tlak v kapalině dostatečně velký (v důsledku např. stlačení), může být $p >> \rho V$. V takovém případě je podle rovnice (15.1) všude splněný vztah $p = konst$, což je Pascalův zákon. Na tomto principu je založena činnost tzv. hydraulického lisu, kapalinových brzd, atd.

Abychom dosáhli v kapalině tlaku p, musíme na píst průřezu S_1 působit silou $F_1 = pS_1$ (obr. 15.2). V důsledku nestlačitelnosti kapaliny a Pascalova zákona vyvíjí kapalina na jiný píst 2 průřezu S_2 sílu $F_2 = pS_2$, takže platí rovnice

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \qquad (15.7)$$

Síla vyvíjená pístem o průřezu S_2 je tedy tolikrát větší než síla, kterou tlačíme na píst průřezu S_1, kolikrát má píst 2 větší průřez než píst 1. Práce sil obou pístů je stejná.

Vztah (15.2) je rovněž jednoduchým důsledkem základního zákona (15.1). Dostaneme ho odečtením rovnic (15.1) napsaných pro dvě různá místa v kapalině. Zajímavější a známější jsou aplikace tohoto vztahu na konkrétní případy. Jestliže vyjádříme potenciál tíhového pole vztahem $V = -gh$, dostaneme pro tlak v hloubce h pod hladinou kapaliny vztah



Obr. 15.3 K odvození Archimedova zákona

$$p = p(h) - p(0) = \rho g h \tag{15.8}$$

a aplikací tohoto vztahu pro těleso ponořené do kapaliny (např. kvádr o základně plochy S a výšce h) získáme vztah pro sílu, kterou působí kapalina na těleso (obr. 15.3)

$$F = F_1 - F_2 = S(h_2 - h_1) g \rho = g \tau \rho\,, \tag{15.9}$$

kde τ je objem ponořeného tělesa. Tento vztah vyjadřuje známý Archimedův zákon: těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která je rovna tíze vytlačené kapaliny.

Chování kapaliny v rotující nádobě nejlépe popíšeme v neinercilní souřadné soustavě pomocí potenciálů působících sil. V případě potenciálového pole odstředivých sil je potenciální energie definována vztahem (11.26) na základě (11.4)

$$W_p = -\int_o^r m r \omega^2 dr = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2,$$

takže potenciál tohoto pole je $V = -r^2 \omega^2/2$. Pro rozdíl tlaků ve dvou rozličných místech rotující kapaliny vychází potom podle vztahu (15.2)

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\omega^2 . \rho \left(r_2^2 - r_1^2\right). \tag{15.10}$$

Jestliže z rovnice (15.1) vyjádříme diferenciál tlaku vztahem $dp = -\rho dV$ a diferenciál potenciální energie dW_p vztahem (11.38), tj. dV = $\mathbf{dr}$. $grad\ V$, dostaneme pro změnu tlaku na rozhraní dvou tekutin s měrnými hmotnostmi ρ_1 a ρ_2 rovnici

$$dp = -\rho_1 \boldsymbol{dr}.grad\,V, = -\rho_2 \boldsymbol{dr}.grad\,V,$$

v které vektor ***dr*** značí přírůstek polohového vektoru v rovině rozhraní. Je proto správná i rovnice

$$(\rho_2 - \rho_1)\,\boldsymbol{dr}.grad\,V = 0,$$

která je splněna jen tehdy, je-li grad $V = 0$, tj. $V = konst$. Jinými slovy: rozhraní dvou tekutin s rozličnými měrnými hmotnostmi je ekvipotenciální hladinou. Rotuje-li tedy kapalina v gravitačním poli, je celkový potenciál
$V = hg - r^2\omega^2/2$ kde h je výška kapaliny a podle právě odvozené věty musí být její povrch ekvipotenciální hladinou. Platí proto rovnice

$$hg - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 = C = h_o g,$$

kde h_o značí výšku hladiny v ose rotace. Hladina rotující kapaliny proto zaujme tvar rotačního paraboloidu vyjádřeného rovnicí

$$h = h_o + \frac{1}{2g} r^2 \omega^2. \tag{15.11}$$

Tento důsledek se prakticky využívá při výrobě parabolických zrcadel.

15.2 Hydrodynamika ideální tekutiny

V této části odvodíme základní rovnice, které popisují takový pohyb ideální kapaliny, při kterém i těžiště systému mění svou polohu (věty 15.4 až 15.7). Východiskem nám bude základní pohybová rovnice (15.6), která byla odvozena v předcházejícím článku.

15.4
Eulerova rovnice pro pohyb kapaliny má tvar

$$\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + \boldsymbol{v}.grad\,\boldsymbol{V} = -grad\,V - \frac{1}{\rho} grad\,p. \tag{15.12}$$

15.5
Bernoulliova rovnice má tvar

Eulerovu rovnici (15.12) odvodíme z obecné rovnice (15.6) tak, že z ní vyjádříme vektor zrychlení pomocí vektoru rychlosti. Pohyb kapaliny je popsán polem vektorů rychlosti (závislostí vektoru rychlosti na polohovém vektoru). Obecně je rychlost jednotlivých částí kapaliny (kapek) funkcí prostorových souřadnic a času, to je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$. Diferenciál vektoru rychlosti je proto určen výrazem

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho V + p = konst. \qquad (15.13)$$

15.6

Hydrodynamický tlak p_d v daném místě proudící kapaliny je hydrostatický tlak p_s zmenšený o kinetickou energii objemové jednotky kapaliny

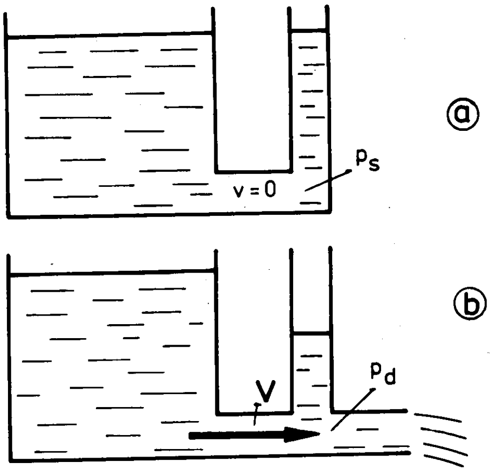
$$p_d = p_s - \frac{1}{2}\rho v^2. \qquad (15.14)$$

15.7

Výtoková rychlost kapaliny v je určena vztahem

$$v = \left\{\frac{1}{\rho}\left[p + \rho\left(V_1 - V_2\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (15.15)$$

kde p a V_1 jsou tlak a potenciál na povrchu kapaliny, V_2 potenciál v místě výtoku.



Obr. 15.4 Hydrostatický p_s a hydrodynamický p_d tlak

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t}dt + \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta x}dx + \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta y}dy + \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta z}dz$$

Poslední tři členy můžeme vyjádřit ve tvaru součinu $\boldsymbol{dr}$.grad $\boldsymbol{v}$, takže vektor zrychlení $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{dv/dt}$ je

$$\boldsymbol{a} = \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + \frac{\boldsymbol{dr}}{dt}.grad\boldsymbol{v} = \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + \boldsymbol{v}.grad\boldsymbol{v}. \qquad (15.16)$$

Dosazením tohoto vyjádření zrychlení do rovnice (15.6) dostaneme rovnici (15.12), která se nazývá Eulerova rovnice.

Tato rovnice popisuje pohyb kapaliny, při kterém mohou vznikat obecně i tzv. víry. Vidíme však, že v tomto případě je problém velmi složitý, protože veličina grad $\boldsymbol{v}$ je tenzor. Za určitých podmínek můžeme tuto obtíž obejít. Připomeňme, že podle výsledků uvedených ve vektorové algebře můžeme psát
grad ($\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$) = $\boldsymbol{a}$.grad $\boldsymbol{b}$ + $\boldsymbol{b}$.grad $\boldsymbol{a}$ + $\boldsymbol{a}$*xrot* $\boldsymbol{b}$ + $\boldsymbol{b}$*xrot* a,
takže při $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}$ platí rovnice

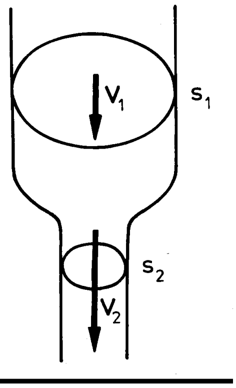
$$grad v^2 = 2\boldsymbol{v}.grad\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v}xrot\ \boldsymbol{v}. \qquad (15.17)$$

Vidíme, že rovnice (15.12) by se značně zjednodušila, kdyby se poslední člen předcházející rovnice rovnal nule, to je, kdyby platilo rot $\boldsymbol{v} = 0$. Můžeme se přesvědčit o tom, že přítomnost tohoto členu značí přítomnost vírové složky v pohybu kapaliny. Položíme-li tedy rot $\boldsymbol{v} = 0$, budeme mít na mysli jen nevírové proudění kapaliny. Pro toto proudění odvodíme z Eulerovy rovnice jednodušší Bernoulliovu rovnici (15.13) platnou pro ustálený stav kapaliny. Jestliže z rovnice (15.17) vypočítáme výraz v.grad v a dosadíme do rovnice (15.12),

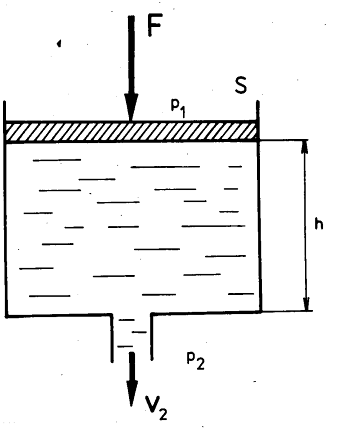
$$\rho\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + \frac{1}{2}\rho\, grad v^2 = -grad(\rho V + p). \qquad (15.18)$$

získáme rovnici

V ustáleném stavu je $\delta v/\delta t = 0$, takže pro



Obr. 15.5 Změna rychlosti toku kapaliny při změně plochy průřezu toku



Obr. 15.6 Výtok kapaliny z nádoby s otvorem

EULER Leonard (oiler), 1707-1783, švýcarský matematik a fyzik, dlouhý čas působil v Petrohradě. Jeho mimořádně rozsáhlé dílo (vydal asi 800 spisů) zahrnuje téměř všechny oblasti matematoky a mnohé problémy tehdejší fyziky, přičemž ve fyzice v maximální míře využíval matematický aparát. Kromě vědecké práce ve fyzice a matematice studoval ještě orientální jazyky a zabýval se medicínou.

BERNOULLI Daniel (bernuji), 1700-1782, švýcarský matematik a fyzik, významný průkopník v teorii a aplikacích parciálních diferenciálních rovnic. Nejméně důležité jsou jeho práce

nestlačitelnou kapalinu se tato rovnice redukuje na tvar

$$grad\left(\frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, V + p\right) = 0 .$$

Skutečně tedy platí rovnice (15.13). Říká, že při ustáleném a nevírovém proudění kapaliny je součet kinetické a potenciální energie objemové jednotky kapaliny a tlaku všude stejný.

Uvažujme o dvou situacích znázorněných na obr. 15.4. V prvém (a) je kapalina v oblasti, kde měříme tlak, v klidu, v druhém případě se tam pohybuje rychlostí v. Jelikož v obou místech má kapalina stejný potenciál, můžeme Bernoulliovu rovnici pro případ a), resp. pro případ b) psát ve tvaru

$$\rho\, V + p_s = C$$

$$\rho\, V + p_d + \frac{1}{2}\rho\, v^2 = C,$$

z kterých vyplývá, že tlak měřený za pohybu kapaliny (tzv. hydrodynamický tlak p_d) je určen pomocí hydrostatického tlaku p_s vztahem

$$p_d = p_s - \frac{1}{2}\rho\, v^2,$$

což je rovnice (15.14). Z ní vyplývá, že hydrodynamický tlak je vždy menší než hydrostatický tlak a při velkých rychlostech proudění může nabýt i záporné hodnoty. V tom případě kapalina vůbec nevystoupí z otvoru, naopak, objeví se sání, čehož se využívá v tzv. vodních vývěvách, rozprašovačích apod. Velkou rychlost proudění můžeme dosáhnout zúžením otvoru na základě tzv. rovnice spojitosti pro ustálené proudění, která má tvar $S.v = konst$, kde S je průřez. Pro dva různé průřezy (obr. 15.5) tedy platí

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \tag{15.19}$$

takže rychlost $v_2 = v_1\ (S_1/S_2)$ je tolikrát větší jako rychlost v_1, kolikrát je průřez S_2 menší než průřez S_1.

z hydrodynamiky, zejména jeho rovnice, která vyjadřuje zákon zachování mechanické energie pro proudící kapalinu. Podobně jako L.Euler pracoval několik let v petrohradské akademii věd.

Prozkoumejme ještě výtok kapaliny z nádoby s otvorem v hloubce h pod hladinou (obr. 15.6). Bernoulliova rovnice napsaná pro hladinu a místo, ve kterém je otvor, mají tvar

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho V_1 + p_1 = C$$
$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho V_2 + p_2 = C.$$

Je-li otvor tak malý, že pohyb hladiny můžeme zanedbat, je $v_1 = 0$. Tlak v místě výtoku klesne na hodnotu barometrického tlaku a stejný tlak na hladině označíme jednoduše p. Za těchto podmínek lehce dostaneme z uvedených rovnic vztah (15.15) pro rychlost výtoku. Je-li barometrický tlak vůči ostatním tlakům zanedbatelný a kapalina je umístěna v tíhovém poli zemském, je V_1-V_2 = hg, takže pro výtokovou rychlost dostaneme známý vzorec

$$v = (2gh)^{\frac{1}{2}}, \tag{15.20}$$

který se nazývá Torricelliho vztah