11

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Elektromagnetické pole

Ivan Červeň, Peter Bokes

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2023

Druhé, upravené a doplnené vydanie publikácie bolo realizované
s podporou KEGA v rámci projektu 006STU-4/2022
„Digitálna podpora predmetov fyzikálneho inžinierstva“

Recenzenti:
prof. Ing. Július Cirák, CSc.
doc. Ing. Ján Vajda, CSc.

ISBN 978-80-227-5354-8

11

ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

V kapitolách o elektrostatickom a magnetickom poli sa neuvažovalo s časovými zmenami týchto polí. Ak sa magnetické pole s časom začne meniť, indukuje sa v priestore elektrické pole a naopak, ak sa mení elektrické pole, vzniká pole magnetické. Cieľom kapitoly je opísať tieto javy. Základným z týchto javov je **elektromagnetická indukcia**, ktorej je venovaná prvá podkapitola. V druhej podkapitole sú odvodené dve **Maxwellove rovnice**, ktoré sú matematickým vyjadrením súvislostí medzi časovo premennými elektrickými a magnetickými poliami. V tejto podkapitole sú ďalej zhrnuté všetky základné rovnice týkajúce sa elektromagnetických javov – štyri Maxwellove rovnice, Ohmov zákon v diferenciálnom tvare ako aj vzťahy medzi vektormi opisujúcimi elektromagnetické pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$, pomocnými vektormi poľa $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ a vektormi opisujúcimi elektrické a magnetické vlastnosti materiálov, t. j. vektorom elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$ a vektorom magnetizácie $\boldsymbol{M}$. Tretia podkapitola sa zaoberá **elektromagnetickým vlnením**, odvodením príslušnej vlnovej rovnice, poukazuje na niektoré vlastnosti elektromagnetických vĺn, napr. polarizáciu a sú v nej odvodené vzťahy vyjadrujúce koľko energie prenáša elektromagnetická vlna.

Potrebné vedomosti

Pred štúdiom tejto kapitoly je potrebné dobre ovládať pojmy, veličiny a vzťahy z elektrostatiky a magnetostatiky, ako intenzita, potenciál, energia v elektrostatickom poli, Gaussov zákon, Biotov-Savartov-Laplaceov vzorec, javy v dielektriku a v magnetickom prostredí. Treba ovládať rovnicu spojitosti elektrického prúdu, Kirchhoffove zákony a Ohmov zákon v diferenciálnom tvare. Nevyhnutnou podmienkou je ovládanie diferenciálnych a integrálnych operácií z vektorového počtu. Na zvládnutie poslednej podkapitoly je potrebné poznať vlnovú rovnicu.

OBSAH

11.1 Elektromagnetická indukcia

Kľúčové slová

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie, Lenzovo pravidlo, vlastná a vzájomná indukčnosť, vznik striedavého napätia, magnetická energia, objemová hustota energie magnetického poľa

11.1.1 Základné vzťahy

Elektromagnetickú indukciu objavil Michael Faraday v prvej tretine XIX. storočia. Výsledky svojich experimentov publikoval v roku 1831.

Pri elektromagnetickej indukcii rozhodujúcou veličinou je **magnetický tok** definovaný už v kapitole 10. ako integrál vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ cez ohraničenú orientovanú plochu:

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \, . \qquad (11.1.1.1)$$

Faradayove experimentálne výsledky možno zhrnúť vetou – ***„Indukované elektromotorické napätie v uzavretom vodiči vzniká vtedy, keď sa mení magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú vodičom“***.

Zmenu magnetického toku plochou ohraničenou uzavretým nepohybujúcim sa vodičom (závitom, cievkou) možno dosiahnuť niekoľkými spôsobmi, ktoré možno uviesť týmito príkladmi

- približovaním permanentného magnetu k cievke, alebo vzďaľovaním od nej,
- zmenou veľkosti elektrického prúdu v susednej cievke (dve cievky vedľa seba, v jednej meníme veľkosť prúdu),
- zmenou magnetickej väzby medzi cievkami, posúvaním feromagnetického jadra medzi dvomi cievkami.

Ako experimentálne zistil už M. Faraday, elektromotorické napätie U_i indukované vo všetkých uvedených experimentoch sa dá vyjadriť vzťahom

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \, , \qquad (11.1.1.2)$$

čo je matematická formulácia **Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie – Faradayova formula**, **Faradayov vzorec**. V sústave SI jednotkou magnetického toku je *weber*, indukovaného elektromotorického napätia *volt*.

Poznámka: *Indukované elektromotorické napätie by sme namerali ako rozdiel potenciálov keby sme do obvodu tvoreného uzavretým vodičom zaradili ideálny voltmeter, a teda obvod prerušili.*

Všetky tri vyššie uvedené príklady sa týkali zmeny magnetického toku v nepohybujúcom sa závite (cievke). Indukované napätie v závite však môže vzniknúť aj pri jeho pohybe v nehomogénnom magnetickom poli, alebo pri jeho deformácii, ktorá vedie k zmene veľkosti plochy ohraničenej závitom. Tieto dva prípady predstavujú odlišný mechanizmus vzniku napätia, od predtým uvedeného, ide o silové pôsobenie magnetického poľa na náboje vo vodičoch, ktoré sa vzhľadom na pozorovateľa pohybujú. Tento mechanizmus bude opísaný v článku 11.1.3.

Keď sa v časti priestoru začne meniť magnetické pole, vzniká tam – indukuje sa, elektrické pole charakterizované intenzitou $\boldsymbol{E}$. Toto pole nemá radiálny charakter ako v okolí bodového náboja, ale je to vírové pole, v ktorom $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$ sa nerovná nule (obrázok 1.3.5.1 v kapitole o vektoroch). Keď sa v takomto poli nachádza uzavretý kruhový vodič (závit), tak vírové pole urýchľuje nabité častice pozdĺž vodiča – intenzita $\boldsymbol{E}$ pôsobí v ňom tangenciálne, a vyvolá **indukovaný elektrický prúd**. Indukované elektrické pole, pri jednom obehu náboja q pozdĺž uzavretého kruhového vodiča, vykoná prácu $A = \oint_K q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Indukované elektromotorické napätie vo Faradayovom zákone zodpovedá tejto práci vykonanej na jednotkovom náboji a preto sa vyjadruje ako integrál intenzity $\boldsymbol{E}$ indukovaného elektrického poľa po uzavretej krivke pozdĺž celej slučky:

$$U_i = \frac{A}{q} = \oint_K \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \qquad (11.1.1.3)$$

kde orientácia krivky K súvisí s orientáciou plochy S z rovnice (11.1.1.1) podľa pravidla pravej ruky. Tento vzťah je analógiou vzťahu (9.2.4.3) z článku o elektromotorickom napätí, kde príčinou vzniku prúdu boli chemické procesy. Tu je príčinou vírové elektrické pole.

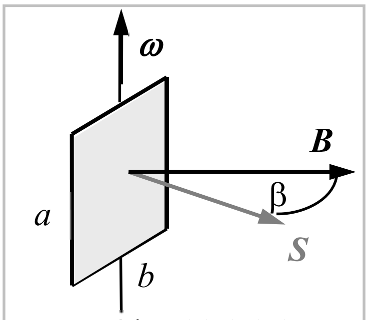
Indukovaný prúd má taký smer, že ním generované magnetické pole sa snaží zachovať pôvodné magnetické pole. To možno vyjadriť aj inak - ***indukovaný elektrický prúd svojimi magnetickými účinkami pôsobí proti zmenám, ktoré ho vyvolali***. Túto skutočnosť objavil v roku 1834 nemecký fyzik H. F. E. Lenz, pôsobiaci v Petrohrade, preto sa nazýva **Lenzovo pravidlo**, alebo **Lenzov zákon**.

Predchádzajúce úvahy, súvisiace so vzťahmi (11.1.1.2) a (11.1.1.3), sa týkajú situácie, keď sa slučka vzhľadom na pozorovateľa nepohybuje a mení sa magnetické pole. Ak sa vodič nachádza v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$, a vzhľadom na pozorovateľa sa pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, potom na častice s nábojom Q, ktoré sa v ňom nachádzajú, pôsobí magnetická sila $\boldsymbol{F}_m = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ (pozri článok 10.1.1). Podiel $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}/Q$ tejto sily a náboja má rovnaký rozmer ako intenzita elektrického poľa, ale nemôže sa s ňou stotožniť. V uzavretej slučke, ktorá sa pohybuje v nehomogénnom poli, alebo sa deformuje tak, že sa mení obsah plochy ohraničenej slučkou, sila $\boldsymbol{F}_m$ vedie k vzniku elektromotorického napätia. Aj tento mechanizmus sa dá opísať zmenou magnetického toku cez plochu ohraničenú slučkou (11.1.1.2). Podrobnejšie je vznik elektromotorického napätia opísaný v **dodatku D1**.

Príklad 11.1.1.1 Rovinná slučka tvorená vodičom ohraničuje plochu veľkosti $S = 15$ cm^2. Nachádza sa v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$. Vektor $\boldsymbol{B}$ zviera s normálou na rovinu slučky uhol $\varphi = 60°$. Veľkosť vektora $\boldsymbol{B}$ sa začala s časom lineárne zmenšovať, v čase $t_o = 0$ bola jeho veľkosť $B_o = 0{,}5$ T a v čase $t_1 = 3$ s už len $B_1 = 0{,}2$ T. Vypočítajte indukované napätie v slučke.

Riešenie: Indukované napätie vypočítame pomocou vzťahu (11.1.1.2), pričom magnetický tok, ktorý vo vzťahu vystupuje, budeme počítať podľa vzťahu (11.1.1.1). V homogénnom poli je vektor $\boldsymbol{B}$ konštantný, možno ho dať pred integrál. Integrál potom vyjadruje **vektorový súčet** elementárnych plôch d$\boldsymbol{S}$, čo je vektor $\boldsymbol{S}$, ktorý je na rovinu slučky kolmý a ktorého veľkosť zodpovedá plošnému obsahu plochy ohraničenej slučkou. Tak dostaneme $\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = B\,S \cos\varphi$. Veľkosť vektora $\boldsymbol{B}$ sa s časom lineárne mení, preto $B = B_o + kt$. Konštantu k získame, ak využijeme známu hodnotu B_1 v čase t_1 : $B_1 = B_o + kB_o$, odkiaľ $k = (B_1 - B_o)/\,t_1$ a potom $B = B_o + t\,(B_1 - B_o)/t_1$. Pre magnetický tok potom platí $\Phi = B\,S \cos\varphi =$ $= (S \cos\varphi)[\,B_o + t\,(B_1 - B_o)/t_1]$. Indukované napätie získame deriváciou posledného vzťahu podľa času: $U_i = -\,(S \cos\varphi)[\,B_o + (B_1 - B_o)/t_1]$. Po dosadení číselných hodnôt $U_i = 5 \times 10^{-5}\,V$.

Príklad 11.1.1.2 V homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$ sa konštantnou uhlovou rýchlosťou ω otáča pravouhlý závit s rozmermi a, b. Otáča sa okolo osi kolmej na vektor $\boldsymbol{B}$, ktorá leží v rovine závitu a prechádza stredmi strán s dĺžkou b. Vypočítajte, aké elektromotorické napätie sa indukuje v závite, a akú má maximálnu hodnotu.



Obr. 11.1.1.1

Riešenie: Použijeme vzťah (11.1.1.2) $U_i = -\,(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t)$, pričom magnetický tok vyjadríme ako skalárny súčin $\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = BS \cos\beta$. Uhol β sa s časom mení, pričom platí $\beta = \omega t$, takže aj magnetický tok cez plochu ohraničenú závitom sa mení: $\Phi = BS \cos(\omega t)$. Indukované napätie vypočítame deriváciou magnetického toku podľa času:

$$U_i = -\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right) = +\,BS\omega \sin(\omega t) = U_{\max} \sin(\omega t)\,.$$

Výpočtom sme získali aj maximálne indukované napätie: $U_{\max} = BS\omega = Bab\omega$.

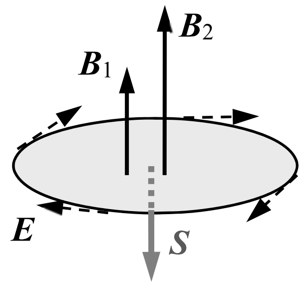
Uvedený príklad 11.1.2.2 predstavuje princíp **vzniku striedavého sínusového napätia**, *aké sa generuje v alternátoroch.*

Kontrolné otázky

1. *Napíšte definíciu magnetického toku a uveďte jeho jednotku.*
2. *Akými experimentmi možno dokumentovať elektromagnetickú indukciu?*
3. *Slovne vyjadrite Lenzovo pravidlo.*
4. *Napíšte Faradayov vzťah vyjadrujúci indukované elektrické napätie.*

11.1.2 Význam záporného znamienka vo Faradayovom zákone

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že záporné znamienko vo Faradayovom zákone elektromagnetickej indukcie súvisí iba s Lenzovým pravidlom. Indukovaný elektrický prúd svojimi magnetickými účinkami sa snaží zabrániť zmene, ktorá ho vyvolala, pôsobí proti nej, čo vyvoláva pocit, že indukované elektromotorické napätie musí mať záporné znamienko.



Obr. 11.1.2.1

Na obrázku je znázornený uzavretý kruhový vodič (závit), nachádzajúci sa v magnetickom poli. Magnetická indukcia nech sa s časom zväčšuje. Vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}_1$ zodpovedá časovému okamihu t_1, vektor $\boldsymbol{B}_2$ okamihu $t_2 > t_1$ (vektory nech sú pre jednoduchosť kolmé na rovinu závitu). Podľa Lenzovho pravidla pri takejto zmene magnetického poľa sa vo vodiči indukuje elektrický prúd, ktorého smer je na obrázku naznačený čiarkovanými šípkami. Rovnaký smer musí mať aj intenzita indukovaného elektrického poľa $\boldsymbol{E}$, ktorá podľa našich predstáv pôsobí na nosiče elektrického náboja vo vodiči a tak vyvoláva indukovaný prúd.

Indukované elektromotorické napätie vyjadríme jednak ako integrál intenzity $\boldsymbol{E}$ po uzavretej krivke totožnej s vodičom (vzťah 11.1.1.3), jednak pomocou Faradayovho vzorca (11.1.1.2):

$$U_i = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\lim_{t_2 \to t_1} \frac{(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \boldsymbol{S}}{t_2 - t_1}\ , \qquad (11.1.2.1)$$

kde $\boldsymbol{S}$ predstavuje vektor priradený ploche ohraničenej vodičom. Smer vektora $\boldsymbol{S}$ je na obrázku zvolený podľa pravidla pravej ruky s ohľadom na smer indukovaného prúdu. Ak v krivkovom integráli vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sú súhlasne rovnobežné, t. j. integrujeme v smere vektora $\boldsymbol{E}$, výsledkom integrácie je kladné číslo. Vtedy aj na druhej strane rovnosti musí byť kladné číslo, takže výraz za limitou musí byť záporný. Keďže menovateľ je kladný, lebo $(t_2 - t_1) > 0$, záporný musí byť čitateľ, t. j. skalárny súčin $(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \boldsymbol{S}$. To znamená, že vektor $\boldsymbol{S}$ musí mať opačný smer ako vektor $(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)$, tak ako je to naznačené na obrázku.

Smer vektora $\boldsymbol{S}$ a smer integrácie teda navzájom súvisia, pričom táto súvislosť sa dá vyjadriť pomocou pravotočivej skrutky (pravidla pravej ruky). Ak by sme smer vektora $\boldsymbol{S}$ zmenili na opačný, vo Faradayovom zákone by sme museli záporné znamienko zmeniť na kladné. Preto ***záporné znamienko vo Faradayovom zákone nie je dôsledkom iba Lenzovho pravidla, ale aj dohody o voľbe smeru vektora***

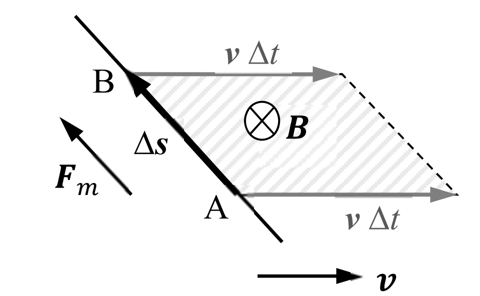
S vzhľadom na smer integrácie pozdĺž hraničnej krivky plochy S ***podľa pravidla pravej ruky.***

Kontrolné otázky

1. *Prečo vo Faradayovom zákone elektromagnetickej indukcie vystupuje záporné znamienko?*
2. *Ako by sa zmenil Faradayov zákon, keby sme namiesto pravotočivej sústavy používali ľavotočivú?*
3. *Ako súvisí záporné znamienko vo Faradayovom zákone s Lenzovým pravidlom?*

11.1. 3 Napätie vznikajúce na pohybujúcich sa vodičoch

Otvorený vodič



Obr. 11.1.3.1

Na obrázku 11.1.3.1 je nakreslená časť vodiča $\Delta\boldsymbol{s}$ pohybujúceho sa v magnetickom poli rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Nech v tomto malom priestore vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je konštantný a nech smeruje kolmo zhora na rovinu papiera. Na voľný elektrický náboj q v tomto úseku vodiča pôsobí magnetická sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{m} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, ktorá kladné náboje posúva svojim smerom v smere šípky k bodu B, záporné náboje opačným smerom.

Sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$ je v podstate motorická sila (pozri článok 9.2.4 o elektromotorickom napätí). Jej pôsobením dochádza k separácii kladných a záporných nábojov, smerujú k opačným koncom vodiča, vo vodiči vzniká elektrické pole, ktorého vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ má opačný smer ako sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$. Ak vodič má dĺžku Δs, tak veľkosť práce A sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$ potrebnej na premiestnenie (kladného) náboja q z jedného konca vodiča na druhý, vypočítame ako integrál

$$A = \int_0^{\Delta s} \boldsymbol{F}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{\Delta s} (q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \qquad (11.1.3.1)$$

Rozdiel potenciálov, teda napätie medzi koncami vodiča je podiel tejto práce a veľkosti preneseného náboja (článok o elektromotorickom napätí, vzťah 9.2.4.1):

$$U = \frac{A}{q} = \int_0^{\Delta s} (\boldsymbol{F}_m/q) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{\Delta s} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \qquad (11.1.3.2)$$

Vzťah upravíme. Predpokladajme, že na krátkom úseku vodiča dĺžky Δs, chápanom ako vektor $\Delta\boldsymbol{s}$, sa rýchlosť $\boldsymbol{v}$ ani vektor $\boldsymbol{B}$ nemenia; potom platí:

$$U = \int_{\mathbf{0}}^{\Delta s} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \Delta \boldsymbol{s}\,.$$

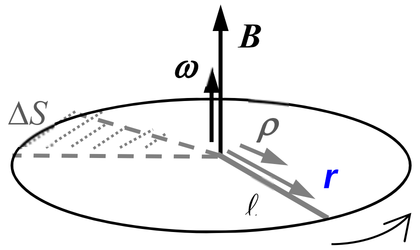
Ak vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ zvierajú uhol α a vektor $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ s vektorom $\Delta\boldsymbol{s}$ uhol β , potom tento výsledok zapíšeme v tvare

$$U = vB\Delta s \sin(\alpha)\cos(\beta),$$

čo v prípade $\alpha = \pi/2$ a $\beta = 0$ vedie na užitočný vzťah

$$U = vB\Delta s\,. \tag{11.1.3.3}$$

Príklad 11.1.3.1 V homogénnom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$ rotuje uhlovou rýchlosťou ω vodič, ktorý má dĺžku ℓ . Rotuje okolo svojho koncového bodu v rovine, na ktorú je kolmý vektor $\boldsymbol{B}$, takže vektor $\boldsymbol{\omega}$ je s ním súhlasne rovnobežný. Vypočítajte elektrické napätie, ktoré vzniká medzi jeho koncami a uveďte, na ktorom konci vodiča bude kladný pól.



Obr. 11.1.3.2

Riešenie: Príklad budeme riešiť dvomi spôsobmi.

a) Vodič sa pohybuje v magnetickom poli, takže na náboj veľkosti q , nachádzajúci sa v ňom, pôsobí sila

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = q(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}\,,$$

t. j.

$$\boldsymbol{F}_m/q = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}\,,$$

kde $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{\rho}$ je polohový vektor začínajúci v strede otáčania a končiaci v ľubovoľnom bode vodiča, pričom $\boldsymbol{\rho}$ je jednotkový vektor súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{r}$. Vektor $\boldsymbol{r}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{B}$, preto ďalšou úpravou vzťahu, dostaneme:

$$\boldsymbol{F}_m/q = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{r}\omega B = r\omega B\boldsymbol{\rho}\,,$$

z čoho vyplýva, že vektor $\boldsymbol{F}_m/q$ (teda aj sila pôsobiaca na kladné náboje) je súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{r}$. Elektróny nesúce záporný elektrický náboj, sa budú pohybovať proti smeru vektora $\boldsymbol{F}_m/q$, čiže k stredu otáčania, ktorý sa stane záporným pólom na vodiči. Veľkosť napätia získame integráciou od stredu otáčania po okraj vodiča (vzťah (11.1.2.3):

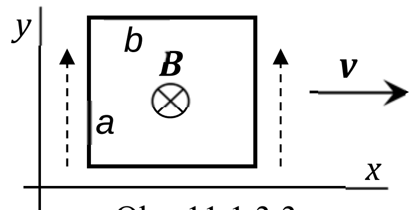
$$U = \int_{\mathbf{0}}^{l} (\boldsymbol{F}_m/q) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathbf{0}}^{l} r\omega B \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\omega B l^2\,. \tag{11.1.3.4}$$

b) Rovnaký výsledok dostaneme, ak použijeme vzťah (11.1.1.2), pričom zmenu magnetického toku získame vynásobením magnetickej indukcie prírastkom plochy ΔS (na obrázku je vyšrafovaná), ktorú opíše otáčajúci sa vodič za jednotku času, resp. plošným obsahom kruhu vydeleným periódou otáčania:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi\ell^2 B}{T} = \frac{\pi\ell^2 B}{(2\pi/\omega)} = \frac{1}{2}\omega B\ell^2.$$

Uzavretý vodič

Vzťahy (11.1.3.1) až (11.1.3.3) sa týkajú otvoreného vodiča pohybujúceho sa v magnetickom poli. Pôsobením magnetickej sily $\boldsymbol{F}_m$ sa v ňom kladné a záporné náboje navzájom separujú, smerujú k opačným koncom vodiča. Vo vodiči tak vznikne elektrické pole, ktorého intenzita $\boldsymbol{E}$ má opačný smer ako pôsobiaca magnetická sila $\boldsymbol{F}_m$. Pohyb nábojov, teda elektrický prúd v takomto vodiči trvá veľmi krátko, len do vytvorenia rovnováhy medzi pôsobiacou magnetickou silou a vznikajúcim elektrickým poľom. V uzavretom vodiči, pokiaľ sa pohybuje v nehomogénnom poli alebo sa deformuje, takáto rovnováha sa nevytvorí.



Obr. 11.1.3.3

Na vedľajšom obrázku, je nakreslený vodič s tvarom obdĺžnika, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ v magnetickom poli. Vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je kolmý na rovinu vodiča a smeruje od nás. Sila $\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, pôsobiaca na voľné náboje vo vodiči, má smer čiarkovaných šípok. Pozdĺž ramienok rovnobežných s rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, nevyvoláva pohyb nabitých častíc, lebo je na ramienka kolmá. Medzi ich koncami nevzniká elektromotorické napätie, ale úbytok napätia podľa Ohmovho zákona v súvislosti s pretekajúcim prúdom. Podľa vzťahu (11.1.3.3) na pravom aj ľavom ramienku vznikne elektromotorické napätie veľkosti $U = vBa$, kde a je dĺžka ramienka. Ak by pole bolo homogénne, tak napätia na oboch ramienkach by boli rovnaké, pôsobili by proti sebe, takže prúd by slučkou netiekol.

V prípade nehomogénneho poľa, keď v miestach ramienok magnetická indukcia nemá rovnaké hodnoty, (nech v pravom ramienku $B_2 > B_1$), tak výsledné napätie U efektívne pôsobiace v slučke bude sa rovnať rozdielu napätí na ramienkach:

$$U = vaB_2 - vaB_1 = va(B_2 - B_1). \qquad (11.1.3.6)$$

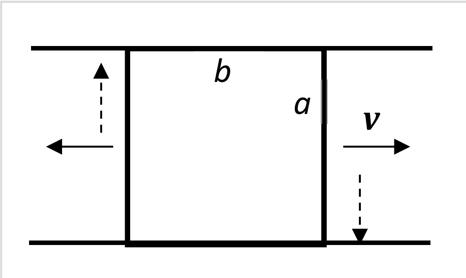
Toto napätie je vlastne výsledkom integrácie po celom obvode slučky:

$$U = \oint (\boldsymbol{F}_m/q) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \qquad (11.1.3.7)$$

Smer integrácie zvolíme zhodne so smerom prúdu, tak ako v časti 11.1.2. Keď $B_2 > B_1$, tak prúd v slučke bude tiecť v smere pravej čiarkovanej šípky, lebo sila $\boldsymbol{F}_m$ pôsobiaca v pravom ramienku je väčšia než v ľavom. V ramienkach rovnobežných s vektorom rýchlosti (osou *x*) je príspevok nulový, lebo vektory $\boldsymbol{F}_m$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sú tam na seba kolmé. V pravom ramienku je príspevok kladný, v ľavom je záporný (vektory $\boldsymbol{F}_m$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ majú opačný smer), ale v absolútnej hodnote menší. Preto je výsledkom celého integrálu kladná hodnota, ako vidno aj zo vzťahu (11.1.3.6), takže

$$U = \oint (\boldsymbol{F}_m/q) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = va(B_2 - B_1). \qquad (11.1.3.8)$$

K rovnakej hodnote možno dospieť aj úvahou o zmene indukčného toku cez plochu ohraničenú závitom, ktorý sa pohybom v nehomogénnom poli mení.



Napätie v závite vzniká aj vtedy, ak sa jeho tvar deformuje tak, že sa pritom mení veľkosť plochy ohraničenej závitom. To platí aj vtedy, ak sa závit nachádza v homogénnom magnetic-kom poli. Aj v takomto prípade ide v podstate o vodiče pohybujúce sa v magnetickom poli. Na overenie tejto skutočnosti poslúži výpočet napätia, ktoré vzniká v obdĺžnikovom závite so stranami a, b, pri zmene jeho plošného obsahu.

Predstavíme si, že závit leží v rovine papiera v homogénnom poli, ktorého vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na rovinu papiera a smeruje k nám. Pravá a ľavá strana obdĺžnika nech sa pohybujú od seba rýchlosťami $\boldsymbol{v}$ (plné šípky na obrázku), takže obdĺžnik zväčšuje svoj plošný obsah. Na náboje v týchto stranách závitu pôsobí magnetická sila $\boldsymbol{F_m} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, ktorá urýchľuje kladné náboje vo svojom smere, na obrázku zakreslenom čiarkovanými šípkami – v pravom ramienku nadol, v ľavom nahor, takže závitom tečie prúd.

Napätie vznikajúce v závite vypočítame dvojakým spôsobom, najprv integráciou veličiny $\boldsymbol{F_m}/q = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ po obvode závitu, v smere vzniknutého prúdu.

Integráciou po jednej zo strán obdĺžnika získame výsledok (podľa vzťahu 11.1.3.3):

$$\int_0^a (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = +vBa \,.$$

Výsledná hodnota je kladná, lebo vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, teda smer integrácie, je súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{F_m}$. Integrál po celom obvode obdĺžnika poskytne hodnotu:

$$\oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = +2vBa \,. \qquad (11.1.3.9)$$

Pri druhom spôsobe pôjde o výpočet napätia zo zmeny magnetického toku. V homogénnom poli, teda v uvažovanom prípade, keď vektor indukcie má všade rovnakú veľkosť, sa zmena veľkosti magnetického toku dá dosiahnuť len zmenou veľkosti plochy ohraničenej závitom. Pri rýchlosti v pohybu bočných strán obdĺžnika, prírastok veľkosti plochy za časový interval Δt predstavuje hodnotu

$$\Delta S = 2av\Delta t \,.$$

Magnetický tok počítame ako skalárny súčin vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ s vektorom $\boldsymbol{S}$ priradeným príslušnej ploche. Smer vektora $\boldsymbol{S}$ zvolíme podľa pravidla pravej ruky v súlade so smerom vzniknutého prúdu, takže bude smerovať od nás, za rovinu papiera, t. j. proti vektoru $\boldsymbol{B}$. Preto ich skalárny súčin je záporný. Aj vektor $\Delta\boldsymbol{S}$

predstavujúci prírastok veľkosti plochy $\Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_2} - \boldsymbol{S_1}$ má smer za rovinu papiera, takže záporný je aj skalárny súčin

$$\Delta\Phi = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{S_2} - \boldsymbol{S_1}) = \boldsymbol{B} \cdot \Delta\boldsymbol{S} = -B\,\Delta S = -2Bav\Delta t\,,$$

odkiaľ

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -2Bav$$

Takže po porovnaní so vzťahom (11.1.3.9) platí:

$$\oint (\boldsymbol{F_m}/q) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (11.1.3.10)$$

Tento výsledok potvrdzuje skutočnosť, že výpočet napätia aj pri deformácii uzavretej slučky vedie k výsledku zhodnému so vzťahom (11.1.1.2), sformulovanému Faradayom.

Na základe príkladov uvedených v tomto článku o pohybe uzavretého vodiča v magnetickom poli môžeme konštatovať, že ***hoci vznik elektromotorického napätia je v týchto prípadoch podmienený pôsobením magnetickej sily, prúd v uzavretom vodiči vzniká až vtedy, keď sa mení magnetický tok cez plochu ohraničenú vodičom.***

Je vhodné znovu pripomenúť, že všeobecný výpočet indukovaného elektromotorického napätia v slučke (závite) je dôsledne matematicky odvodený v dodatku D1 tejto kapitoly.

Kontrolné otázky

1. *Existuje súvislosť medzi Faradayovým vzťahom pre indukované napätie a vzťahom pre napätie medzi koncami vodiča pohybujúceho sa magnetickým poľom?*
2. *Môže otáčaním priameho vodiča v magnetickom poli vzniknúť medzi jeho koncami elektrické napätie? Vznikne v prípade, keď je os otáčania kolmá na vektor magnetickej indukcie?*
3. *Môže otáčanie uzavretého vodiča v homogénnom magnetickom poli zapríčiniť pohyb elektrického náboja v ňom?*
4. *Akú polohu musí mať os otáčania kruhového závitu vzhľadom na rovinu závitu a vzhľadom na vonkajšie magnetické pole, aby sa v ňom indukovalo maximálne možné elektrické napätie?*
5. *Môže v uzavretom vodiči, otáčajúcom sa jedným smerom v homogénnom magnetickom poli, vzniknúť striedavé elektrické napätie?*

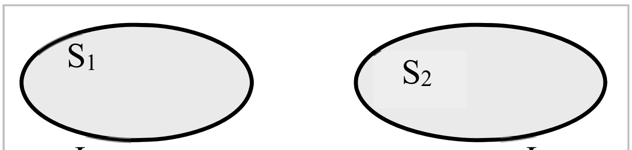
11.1.4 Vlastná a vzájomná indukčnosť

Magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú závitom (uzavretým vodičom, napr. aj cievkou) môže byť vyvolaný permanentným magnetom nachádzajúcim sa v blízkosti závitu, ale aj elektrickým prúdom prechádzajúcim buď samotným závitom, alebo vodičom nachádzajúcim sa v jeho blízkosti. Ak je magnetický tok Φ prechádzajúci závitom budený elektrickým prúdom I, zapisuje sa tento vzťah v tvare

$$\Phi = LI \,. \tag{11.1.4.1}$$

Ak je magnetický tok budený prúdom prechádzajúcim cez ten istý uzavretý vodič (závit), potom L je **vlastná indukčnosť**, ak prúdom tečúcim cez iný vodič, ide o **vzájomnú indukčnosť**, pričom sa používa označenie $M,$ alebo L_{mn} .

Posúdime tieto dva prípady – podľa obrázku, kde pre jednoduchosť sú uzavreté vodiče nakreslené len ako dva závity. Prvým závitom prechádza prúd I_1 , druhým I_2 .



Obr. 11.1.4.1

Magnetický tok je definovaný integrálom

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

pričom vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ sa počíta podľa Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzorca. Vektor $\boldsymbol{B}_1$ v okolí prvého vodiča:

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{I_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \,.$$

Spojením týchto dvoch vzťahov získame pre magnetický tok Φ_{21} prechádzajúci cez plochu ohraničenú druhým závitom, ale vyvolaný prúdom v prvom závite:

$$\Phi_{21} = \iint_{S2} \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S_2} = \iint_{S2} \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\oint \frac{I_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = I_1 \iint_{S2} \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \Rightarrow$$

$$\Phi_{21} = I_1 L_{21} \,, \tag{11.1.4.2}$$

kde L_{21} , teda plošný integrál cez plochu S_2 , je vzájomná indukčnosť dvoch závitov. Podobným postupom možno získať vzťah pre vlastnú indukčnosť, ak namiesto integrácie cez plochu ohraničenú druhým vodičom, integrujeme vektor $\boldsymbol{B}_1$ cez plochu ohraničenú prvým vodičom.

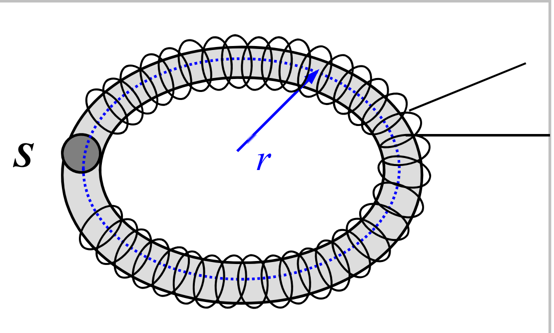
Vychádzajúc zo vzťahu (11.1.4.1) a z Faradayovho zákona pre indukované elektrické napätie, dostaneme všeobecný vzťah (bez ohľadu na to, či ide o vlastnú, alebo vzájomnú indukčnosť):

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ . \qquad (11.1.4.3)$$

Podľa tohto vzťahu, v súlade s Lenzovým pravidlom, sa v cievke s vlastnou indukčnosťou L indukuje elektrické napätie, ak sa mení prúd, ktorý ňou prechádza.

Jednotkou vlastnej i vzájomnej indukčnosti je **henry** (H). Vlastnú indukčnosť veľkosti 1 H má cievka, v ktorej sa pri zmene elektrického prúdu o 1 ampér za 1 sekundu, indukuje elektrické napätie 1 volt.

Príklad 11.1.4.1 Vypočítajte vlastnú indukčnosť tenkej toroidálnej cievky, pričom polomer toroidu je r, prierez S, cievka má N závitov a je navinutá na jadre s permeabilitou μ (Obr.).



Obr. 11.1.4.1

Riešenie: Najprv treba vypočítať intenzitu magnetického poľa a magnetickú indukciu v toroide. Použijeme na to zákon celkového prúdu

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = NI \ \Rightarrow\ H\,2\pi r = NI \ \Rightarrow\ H = \frac{NI}{(2\pi r)} \ \Rightarrow\ B = \mu\frac{NI}{(2\pi r)}\,.$$

Magnetický tok cez jeden závit cievky je $\Phi_1 = BS$, cez všetky závity spolu $\Phi = NBS = (\mu N^2 S\, I)/(2\pi r)$, odkiaľ na základe vzťahu (11.1.4.1) pre vlastnú indukčnosť L dostaneme

$$L = \frac{\mu N^2 S}{2\pi r}\ . \qquad (11.1.4.4)$$

Poznámka: *Na základe vzťahu pre vlastnú indukčnosť toroidálnej cievky môžeme získať vzťah pre vlastnú indukčnosť veľmi dlhého solenoidu, keď namiesto obvodu toroidu* $2\pi r$ *dosadíme dĺžku solenoidu* ℓ.

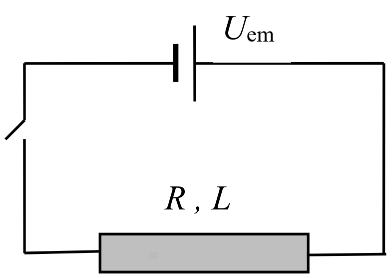
Príklad 11.1.4.2 Vypočítajte, koľko závitov by musela mať cievka s tvarom toroidu bez feromagnetického jadra, aby mala vlastnú indukčnosť $L = 0{,}1$ H. Prierez toroidu $S = 1\ \mathrm{cm}^2$, stredný polomer $r = 2$ cm.
Riešenie: Na výpočet použijeme vzťah (11.1.4.4), z ktorého pre počet závitov N dostaneme $N = (L\,2\pi r/S\mu_0)^{1/2}$, lebo v toroide $\mu_r = 1$. Po dosadení hodnôt dostaneme výsledok $N = 1\times 10^4$ závitov.

Kontrolné otázky

1. *Definujte veličinu vzájomná indukčnosť.*
2. *Definujte veličinu vlastná indukčnosť.*
3. *Aký vzťah vyjadruje indukované napätie na cievke s vlastnou indukčnosťou L?*
4. *Ako sa volá jednotka vlastnej indukčnosti v sústave SI ?*
5. *Ktorá cievka má jednotkovú vlastnú indukčnosť?*

11.1.5 Energia magnetického poľa

Uvážime jednoduchý elektrický obvod pozostávajúci zo zdroja jednosmerného prúdu s elektromotorickým napätím U_{em} a cievky, ktorej vinutie má elektrický odpor R a vlastnú indukčnosť L .



Obr. 11.1.5.1

Po zopnutí spínača začne obvodom prechádzať elektrický prúd, pričom pomery v obvode opíšeme druhým Kirchhoffovým zákonom:

$$\sum_i (U_{em})_i = \sum_i R_i I_i \,,$$

ktorý prispôsobíme tomuto prípadu. V obvode je zaradený jediný rezistor s elektrickým odporom R , takže na pravej strane rovnice zostane len člen RI . V obvode pôsobia dva zdroje elektromotorického napätia – jednosmerný zdroj s napätím U_{em} a cievka, v ktorej pri zmene veľkosti prúdu vzniká indukované napätie $U_i = -\,L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)$. Po dosadení do Kirchhoffovho zákona dostaneme rovnicu:

$$U_{em} - L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) = RI \,.$$

Vynásobíme ju elektrickým nábojom $\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$ a tak dostaneme rovnicu

$$U_{em}\mathrm{d}Q - L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) I\,\mathrm{d}t = RI^2\mathrm{d}t \,.$$

Rovnicu budeme integrovať:

$$\int_0^Q U_{em}\,\mathrm{d}Q = \int_0^I LI\,\mathrm{d}I + \int_0^t RI^2\mathrm{d}t \,.$$

Na ľavej strane rovnice je výraz predstavujúci energiu, ktorú zdroj jednosmerného prúdu dodal do obvodu, keď obvodom prešiel náboj Q . Posledný člen rovnice (na pravej strane) predstavuje Joulove straty, ktoré vznikli v časovom intervale $(0, t)$. Prostredný člen v rovnici po uskutočnení integrácie nadobudne tvar

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} LI^2 , \qquad (11.1.5.1)$$

a predstavuje **energiu magnetického poľa**, ktoré sa vytvorilo v cievke, resp. v okolí vodiča s indukčnosťou L, ktorým prechádza prúd I.

Vnútri v cievke je magnetické pole silnejšie, mimo cievky slabne so vzdialenosťou. Preto sa zavádza veličina (**objemová**) **hustota energie magnetického poľa**, ktorá predstavuje energiu pripadajúcu na objemovú jednotku a umožňuje vyjadriť ju ako funkciu polohy. Túto veličinu zavedieme pomocou výpočtu v cievke toroidálneho tvaru, kde sa magnetické pole nachádza iba vo vnútri toroidu, mimo neho je magnetické pole prakticky nulové.

Príklad 11.1.5.1 Vypočítajte energiu magnetického poľa v toroidálnej cievke pozostávajúcej z N závitov navinutých na toroide s kruhovým prierezom S, stredným polomerom toroidu R a vyrobeného z materiálu s permeabilitou μ. (Obrázok, aj čiastkové výsledky – pozri príklad 11.1.4.1.)

Riešenie: Do vzťahu pre energiu dosadíme výsledky riešenia príkladu 11.1.4.1:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu S N^2}{2\pi R} I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu N I}{2\pi R} \frac{N\, I}{2\pi R} (S 2\pi R),$$

kde $(\mu NI / 2\pi R) = B$ je veľkosť magnetickej indukcie v toroide, $(NI/2\pi R)$ je veľkosť intenzity magnetického poľa H v toroide a $(S\, 2\pi R)$ predstavuje približne objem toroidu. Ak rovnicu vydelíme objemom toroidu, dostaneme magnetickú energiu pripadajúcu na jednotkový objem – hustotu energie magnetického poľa:

$$w_m = \frac{E_{\mathrm{m}}}{S\, 2\pi R} = \frac{1}{2} BH . \qquad (11.1.5.2)$$

Poznámka: *Veľkosť vektorov B a H uvedená v príklade platí presne len pre kružnicu s polomerom R, ktorú sme situovali do stredu prierezu toroidového jadra. Smerom k vonkajšiemu okraju toroidu sa polomer kružníc zväčšuje, preto veľkosti vektorov sa zmenšujú. Presný postup by preto vyžadoval integráciu. Výsledok pre objemovú hustotu magnetickej energie je však správny a je rovnaký, ako by sme získali presným postupom integráciou. Pri presnom odvodení sa možno presvedčiť, že vo výraze pre* **hustotu energie magnetického poľa** *vystupuje skalárny súčin vektorov:*

$$w_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} . \qquad (11.1.5.3)$$

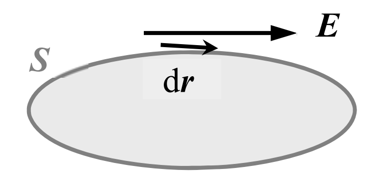
Kontrolné otázky

1. *Čo je príčinou existencie energie magnetického poľa v okolí vodiča?*
2. *Napíšte vzťah pre objemovú hustotu energie magnetického poľa.*
3. *Slovne uveďte, čo rozumieme pod objemovou hustotou energie magnetického poľa.*
4. *Aké napätie sa indukuje v cievke, keď sa mení veľkosť elektrického prúdu ktorý ňou prechádza?*

11.2 Maxwellove rovnice

Kľúčové slová
Maxwellove rovnice, materiálové vzťahy, rovnica kontinuity, Maxwellove rovnice vo vákuu, hustota energie elektromagnetického poľa

11.2.1 Maxwellova rovnica spájajúca vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$



Obr. 11.2.1.1

Táto Maxwellova rovnica vyplýva z rovníc opisujúcich elektromagnetickú indukciu. Konkrétne ide o vyjadrenie indukovaného elektrického napätia v nemeniacej sa uzavretej krivke (nemusí ísť o fyzický vodič) – na jednej strane pomocou Faradayovej formuly ako derivácie magnetického toku Φ podľa času:

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,, \tag{11.2.1.1}$$

a na druhej strane ako krivkového integrálu intenzity indukovaného elektrického poľa po uzavretej krivke (vzťah 11.1.1.3):

$$U_i = \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.2.1.2}$$

Tieto dve vyjadrenia musia poskytnúť rovnaký výsledok. Prv než porovnáme pravé strany rovníc, upravíme ich. Pravú stranu rovnice (11.2.1.1) upravíme tak, že využijeme definíciu magnetického toku:

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

Pri tejto úprave treba komentovať zámenu totálnej derivácie magnetického toku parciálnou deriváciou vektora $\boldsymbol{B}$. Ide o zámenu poradia derivácie a integrácie. Na ľavej strane vzťahu ide o celkovú zmenu magnetického toku cez plochu ohraničenú integračnou krivkou, pričom po zámene poradia derivácie a integrácie treba v každom bode plochy uvažovať o lokálnej časovej zmene vektora magnetickej indukcie. Preto pod integrálom musí vystupovať parciálna derivácia.

Rovnicu (11.2.1.2) upravíme pomocou Stokesovej vety na plošný integrál, aby sme mohli porovnávať funkcie vystupujúce v integráloch:

$$U_i = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

Z rovnosti pravých strán upravených rovníc vyplýva:

$$\iint \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\ .$$

Medze plošných integrálov sú určené integračnou krivkou, ktorá však v priestore môže byť ľubovoľná, preto na splnenie rovnosti je potrebné, aby sa sebe rovnali integrované funkcie:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,. \tag{11.2.1.3}$$

Tak sme získali **tretiu Maxwellovu rovnicu**, ktorá vyjadruje skutočnosť, že v časovo premennom magnetickom poli sa indukuje elektrické pole.

Intenzita $\boldsymbol{E}$ v rovnici (11.2.1.3) môže zahŕňať popri intenzite indukovaného poľa aj intenzitu elektrostatického poľa $\boldsymbol{E}_s$, pre ktorú vždy platí rot $\boldsymbol{E}_s = 0$. Táto skutočnosť vyplýva z konzervatívnosti elektrostatického poľa v ktorom platia vzťahy

$$\oint \boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\,,$$

bez ohľadu na tvar zvolenej integračnej krivky.

Kontrolné otázky

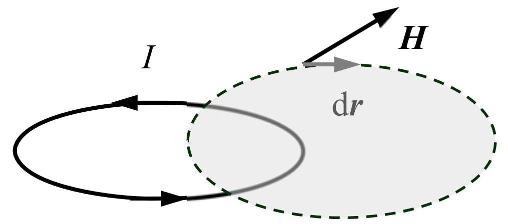
1. *Vyjadrite indukované elektromotorické napätie pomocou Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie.*
2. *Vyjadrite vzťah pre intenzitu indukovaného elektrického poľa.*
3. *Vyjadrite elektromotorické napätie ako cirkuláciu intenzity indukovaného elektrického poľa.*
4. *Napíšte všeobecnú Stokesovu vetu o zámene krivkového integrálu plošným integrálom.*
5. *Ako súvisí orientácia vektora plochy s orientáciou jej hraničnej krivky?*
6. *Napíšte tretiu Maxwellovu rovnicu a uveďte jej fyzikálny význam.*
7. *Ako vyzerá tretia Maxwellova rovnica v stacionárnom elektromagnetickom poli?*

11.2.2 Maxwellova rovnica spájajúca vektory $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{D}$

V kapitole o magnetickom poli bola odvodená rovnica (10.4.3.1), vyjadrujúca tzv. zákon celkového prúdu (zákon prietoku):

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k I_k \,. \qquad (11.2.2.1)$$

Podľa tohto zákona krivkový integrál vektora intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ po uzavretej krivke sa rovná súčtu všetkých makroskopických prúdov I_k spriahnutých s integračnou krivkou. Pod spriahnutým prúdom rozumieme prúd tečúci takým vodičom, ktorý je s uzavretou integračnou krivkou spojený ako dve susedné ohnivká reťaze. Ľavú stranu rovnice (11.2.2.1) upravíme pomocou Stokesovej vety na plošný integrál. Na obrázku je integračná krivka znázornená prerušovanou čiarou. Prechod na plošný integrál znamená integrovať po ploche ohraničenej touto krivkou. Aj pravú stranu vyjadríme ako plošný integrál prúdovej hustoty makroskopických prúdov cez tú istú plochu, pričom do vektora prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ sú zahrnuté všetky spriahnuté makroskopické prúdy:



Obr. 11.2.2.1

$$\iint \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \,. \qquad (11.2.2.2)$$

Integračná krivka je ľubovoľná, výsledok nezávisí od jej tvaru. Preto aj integračné medze plošných integrálov v rovnici (11.2.2.2) sú ľubovoľné, takže rovnica bude platiť iba vtedy, keď funkcie za integrálmi na ľavej a pravej strane rovnice budú rovnaké:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \,. \qquad (11.2.2.3)$$

Táto rovnica je správna len dovtedy, pokým sa v okolí integračnej krivky nemení vonkajšie elektrické pole. Platí v stacionárnom stave. Maxwell rozšíril pravú stranu rovnice tak, aby platila aj pri zmenách elektrického poľa:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \,, \qquad (11.2.2.4)$$

pričom $\boldsymbol{D}$ je vektor elektrickej indukcie. Toto je **štvrtá Maxwellova rovnica**, ktorá ukazuje, že magnetické pole vzniká nie iba v okolí vodičov elektrického prúdu, ale aj v časovo premennom elektrickom poli.

Pripísanie ďalšieho člena do rovnice vyžaduje podrobné zdôvodnenie. Ak na rovnicu (11.2.2.3) aplikujeme nabla operátor skalárne (t. j. vykonáme operáciu *divergencia*), na ľavej strane dostaneme $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$, čo sa identicky rovná nule. Na pravej strane vznikne pritom člen $\operatorname{div}\boldsymbol{J}$, ktorý sa podľa rovnice kontinuity pre elektrický prúd rovná nule iba v stacionárnom stave. Podľa rovnice kontinuity

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0\,, \tag{11.2.2.5}$$

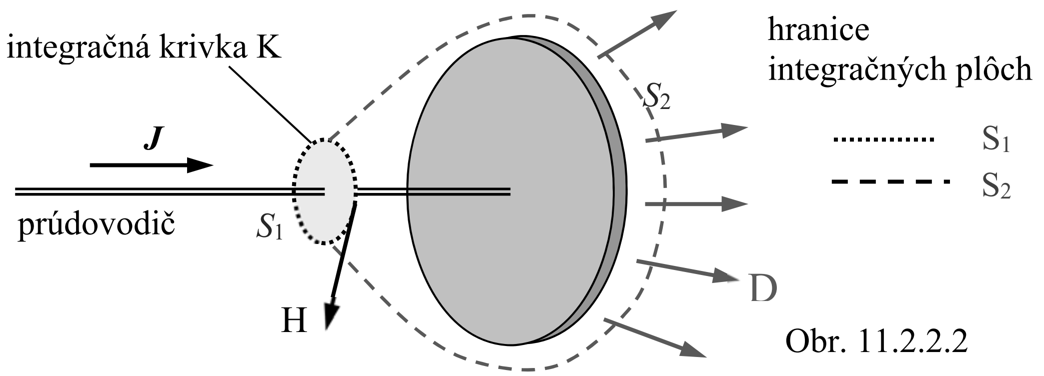
v ktorej ρ_v je objemová hustota voľného elektrického náboja, ktorá vystupuje aj v prvej Maxwellovej rovnici $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho_v$. Túto Maxwellovu rovnicu použijeme pri úprave rovnice kontinuity:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{D})}{\partial t} = \operatorname{div}\boldsymbol{J} + \operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0\,.$$

Preto vo všeobecnosti, aj pri nestacionárnych javoch, platí:

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0\,.$$

Takáto úprava naznačuje, že zatiaľ čo v stacionárnom stave (keď $\partial\boldsymbol{D}/\partial t = 0$) platí vzťah $\operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0$, v časovo premenných poliach platí všeobecnejší vzťah (11.2.2.5). Preto pripísanie ďalšieho člena do rovnice (11.2.2.3) znamená jej rozšírenie aj na nestacionárne procesy. Člen $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ má rovnaký rozmer ako hustota elektrického prúdu, t. j. meria sa v jednotkách $\mathrm{A{\cdot}m^{-2}}$. Je to plošná hustota **Maxwellovho (posuvného) prúdu**.



Obr. 11.2.2.2

Fyzikálny význam posuvného prúdu možno vysvetliť na nasledujúcom príklade. Keď vodičom zakončeným platňou (kondenzátora) začne prechádzať elektrický prúd, na platňu prichádza voľný elektrický náboj, ktorým sa platňa nabíja, čo znamená, že v jej okolí sa mení elektrické pole. Elektrické pole vytvorené voľným nábojom opisujeme vektorom elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$. Elektrický prúd prechádzajúci vodičom pritom vytvára magnetické pole, ktoré opisujeme vektorom intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$. Cirkulácia vektora $\boldsymbol{H}$, t. j. jeho dráhový integrál pozdĺž integračnej krivky (Obr.) sa rovná elektrickému prúdu, lebo tento prechádza plochou S_1, ktorá je ohraničená integračnou krivkou. Nie celou plochou S_1 prechádza prúd, ale je na nej časť, na ktorej prúdová hustota pritekajúceho prúdu nie je nulová. Preto ani plošný integrál na pravej strane rovnice (11.2.2.2) nie je nulový. Rovinnú plochu S_1 však možno nahradiť plochou S_2, ktorá má tvar banky s otvorom tvoreným integračnou krivkou K (to je v súlade so Stokesovou vetou). Cez túto plochu elektrický prúd neprechádza, preto plošný integrál hustoty pritekajúceho prúdu cez túto plochu sa rovná nule. Ak by v štvrtej Maxwellovej rovnici na pravej strane chýbala hustota posuvného prúdu, vznikol by nesúlad medzi pravou a ľavou stranou rovnice (11.2.2.1). Prítomnosť posuvného prúdu však odstraňuje tento nedostatok. V miestach, kde sme zvolili plochu S_2, sa počas pritekania elektrického náboja na platňu mení elektrické pole. Derivácia vektora $\boldsymbol{D}$ sa preto nerovná nule a rovnako ani plošný integrál hustoty posuvného prúdu cez plochu S_2. Tak sa rovnosť ľavej a pravej strany rovnice (11.2.2.1) zachová.

Príklad 11.2.2.1 Ukážte, že v rovinnom kondenzátore, medzi platňami ktorého je vákuum, možno Maxwellov posuvný prúd I vyjadriť v tvare $I = C(dU/dt)$, kde C je kapacita kondenzátora a U napätie medzi jeho platňami.

Riešenie: Pre kapacitu rovinného kondenzátora platí $C = (\varepsilon_o S)/l$, kde S je plošný obsah jednej platne, l vzdialenosť medzi platňami. Ak na platniach kondenzátora je voľný náboj s plošnou hustotou σ, medzi platňami je elektrická indukcia $D = \sigma$ a intenzita elektrického poľa $E = \sigma/\varepsilon_o$. To využijeme pri nasledujúcej úprave:

$$C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(El) = Cl\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = Cl\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\right) = \frac{Cl}{\varepsilon_o}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon_o S}{l}\frac{l}{\varepsilon_o}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t},$$

čím sme dostali súčin plošného obsahu platne kondenzátora s hustotou Maxwellovho posuvného prúdu. Preto je to Maxwellov posuvný prúd.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte štvrtú Maxwellovu rovnicu pre stacionárny stav.*
2. *Napíšte štvrtú Maxwellovu rovnicu platnú aj pre nestacionárny stav.*
3. *Vyjadrite slovne všeobecný obsah štvrtej Maxwellovej rovnice.*
4. *Napíšte rovnicu kontinuity pre elektrický prúd.*
5. *Uveďte súvislosť rovnice kontinuity pre elektrický prúd so štvrtou Maxwellovou rovnicou.*
6. *Uveďte čo je Maxwellov posuvný prúd.*
7. *Aký význam má Maxwellov posuvný prúd pri nestacionárnych javoch?*
8. *Čomu sa rovná cirkulácia vektora **H** v stacionárnom elektromagnetickom poli?*
9. *Čomu sa rovná cirkulácia vektora **H** v nestacionárnom elektromagnetickom poli?*

11.2.3 Súhrn rovníc opisujúcich elektromagnetické pole

V kapitole o elektrostatickom poli bola sformulovaná prvá Maxwellova rovnica:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_v \ , \tag{11.2.3.1}$$

v ktorej $\boldsymbol{D}$ je vektor elektrickej indukcie a ρ_v objemová hustota **voľného** elektrického náboja, teda náboja, ktorý sa môže premiestňovať na makroskopické vzdialenosti. Prvá Maxwellova rovnica je zovšeobecnením Coulombovho zákona a Gaussovho zákona.

V kapitole o magnetickom poli bola odvodená druhá Maxwellova rovnica:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \ , \tag{11.2.3.2}$$

ktorá vyjadruje skutočnosť, že statické magnetické pole nemá podobné zdroje ako elektrostatické pole, že magnetické indukčné čiary nemajú začiatok a koniec, ale že sú to uzavreté krivky.

Prvá aj druhá Maxwellova rovnica boli odvodené pre prípad stacionárnych polí – elektrostatického a magnetostatického, ktoré sa s časom nemenia, ale platia aj v nestacionárnych poliach. ***Tretia a štvrtá Maxwellova rovnica opisujú nestacionárne polia*** a vyjadrujú významnú prírodnú zákonitosť – zmena magnetického poľa vedie ku vzniku elektrického poľa a naopak, časovo premenné elektrické pole má za následok vznik magnetického poľa.

V článku 11.2.1 bola odvodená tretia Maxwellova rovnica:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right), \tag{11.2.3.3}$$

v ktorej $\boldsymbol{E}$ je vektor intenzity elektrického poľa a $\boldsymbol{B}$ vektor magnetickej indukcie. Rovnica vyjadruje existenciu elektrického poľa v časovo premenlivom magnetickom poli.

V článku 11.2.2 bola odvodená štvrtá Maxwellova rovnica:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \ , \tag{11.2.3.4}$$

v ktorej $\boldsymbol{H}$ je vektor intenzity magnetického poľa, $\boldsymbol{D}$ vektor elektrickej indukcie a $\boldsymbol{J}$ vektor hustoty elektrického prúdu, reprezentujúci transport voľného elektrického náboja (nie viazaného, t. j. nevzťahuje sa na mikroskopické prúdy cirkulujúce v molekulách). Rovnica vyjadruje skutočnosť, že magnetické pole existuje nielen v okolí vodičov elektrického prúdu, ale aj v časovo premenlivom elektrickom poli. V podstate obsahuje aj rovnicu kontinuity elektrického prúdu.

V uvedených štyroch Maxwellových rovniciach vystupujú derivácie (priestorové i časové) štyroch základných vektorov $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H},$ opisujúcich elektromagnetické pole. Preto sa tieto rovnice uvádzajú aj pod názvom **Maxwellove rovnice v diferenciálnom tvare**. Každá z týchto rovníc má svoj ekvivalent v **integrálnom tvare**. V nasledujúcej tabuľke sú tieto ekvivalenty uvedené po súvisiacich dvojiciach:

$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_v$	$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_v$
$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$	$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$
$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$	$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$
$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k I_k$

(11.2.3.5)

K poslednej zo série rovníc v integrálnom tvare treba uviesť, že do súčtu makroskopických prúdov I_k treba zarátať aj Maxwellove posuvné prúdy. Odvodenie vzťahov medzi integrálnym a diferenciálnym tvarom Maxwellových rovníc možno nájsť v príslušných kapitolách.

Na opis spolarizovaného stavu dielektrík sa používa *vektor elektrickej polarizácie* $\boldsymbol{P}$ a v magnetických látkach *vektor magnetickej polarizácie* $\boldsymbol{J}_m$, resp. *vektor magnetizácie* $\boldsymbol{M}$. Tieto vektory vystupujú v nasledujúcich vzťahoch:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \,,$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_m = \mu_o (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \,, \tag{11.2.3.6}$$

kde $\boldsymbol{D}$ je vektor elektrickej indukcie, $\boldsymbol{E}$ vektor výslednej intenzity elektrického poľa v dielektriku (vektorový súčet intenzít vytvorených voľnými aj viazanými nábojmi), $\boldsymbol{B}$ vektor magnetickej indukcie (vyvolaný makroprúdmi i mikroprúdmi), ε_o elektrická konštanta (permitivita vákua) a μ_o magnetická konštanta (permeabilita vákua).

Pre úplnosť je v súvislosti s elektrickými prúdmi vhodné uviesť aj rovnicu kontinuity (spojitosti), hoci vyplýva z Maxwellových rovníc:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \,, \tag{11.2.3.7}$$

kde $\boldsymbol{J}$ je vektor hustoty elektrického prúdu a ρ_v objemová hustota voľného elektrického náboja. Z rovnice kontinuity v stacionárnom stave vyplýva prvý Kirchhoffov zákon.

Elektromagnetické pole charakterizujeme aj objemovou hustotou energie. V článkoch 8.4.3 a 11.1.5 boli za určitých zjednodušujúcich predpokladov odvodené vzťahy pre objemové hustoty energie v elektrickom, resp. v magnetickom poli. Vo všeobecnosti možno ukázať (pozri Dodatok D2), že časovú zmenu celkovej objemovej hustoty energie elektromagnetického poľa možno vyjadriť vzťahom:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \, . \qquad (11.2.3.9)$$

Ak je relatívna permitivita a permeabilita látky nemenná, tento výraz zodpovedá súčtu parciálnych vzťahov pre elektrické a magnetické pole. Uvedomme si, že indukcia elektrického poľa a indukcia magnetického poľa vnáša do výrazu (11.2.3.9) prostredníctvom vzťahov (11.2.3.6) aj vektory polarizácie či magnetizácie, a preto v rovnici (11.2.3.9) je zahrnutá aj interakcia elektromagnetického poľa s látkou.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte všetky štyri Maxwellove rovnice v diferenciálnom tvare.*
2. *Ktoré z Maxwellových rovníc sa týkajú stacionárneho stavu?*
3. *Aký vzájomný vzťah medzi elektrickým a magnetickým poľom vyplýva z tretej a štvrtej Maxwellovej rovnice?*
4. *Napíšte Maxwellove rovnice v integrálnom tvare.*
5. *Ktorými základnými rovnicami opisujeme deje súvisiace s vedením elektrického prúdu?*
6. *Napíšte a vysvetlite rovnicu kontinuity pre elektrický prúd.*
7. *Uveďte rozdiel medzi vektorom magnetickej polarizácie a vektorom magnetizácie.*
8. *Aký zákon pre elektrický prúd vyplýva z rovnice kontinuity v stacionárnom stave?*

11.2.4 Mikroskopické Maxwellove rovnice

Maxwellove rovnice v tvare (11.2.3.5) opisujú správanie sa poľa na *makroskopickej* úrovni. Myslíme tým to, že nimi vypočítanú intenzitu $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ alebo indukciu $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ by sme namerali pomocou senzora/sondy v mieste $\boldsymbol{r}$, ktorá by na tomto mieste obsahovala veľké množstvo atómov. Charakterizujeme tak pole nie presne v jedinom bode priestoru ale v malom no stále makroskopickom okolí miesta $\boldsymbol{r}$. Podobne, takáto sonda meria polia v čase t, ktorý v skutočnosti charakterizuje správanie sa poľa v krátkom intervale času, za ktorý prebehne množstvo mikroskopických procesov.

Pre *mikroskopický* opis elektromagnetického poľa musíme všetky častice látky považovať za „externý náboj“ a ich pohyb za „externú hustotu elektrického prúdu“. V mikroskopickom prístupe nezavádzame polarizáciu ani magnetizáciu. Mikroskopické veličiny poľa si v tejto časti označíme malými písmenami $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)$. Indukcia elektrického poľa a intenzita magnetického poľa (11.2.3.6) nie sú potrebné, nakoľko pri absencii vektorov polarizácie a magnetizácie sa líšia od $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t)$ a $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)$ len prenásobením s konštantami $\boldsymbol{d} = \varepsilon_o \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b}/\mu_o$. *Mikroskopické Maxwellove rovnice* potom nadobúdajú tvar

$\operatorname{div} \boldsymbol{e} = \rho$	$\oiint \boldsymbol{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$
$\operatorname{div} \boldsymbol{b} = 0$	$\oiint \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$
$\operatorname{rot} \boldsymbol{e} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}\right)$	$\oint \boldsymbol{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$
$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \mu_o \boldsymbol{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_o \sum_k I_k$

(11.2.4.1a)

Na rozdiel od makroskopických Maxwellových rovníc (11.2.3.5), tu hustota náboja ρ a hustota elektrického prúdu $\boldsymbol{J}$ predstavujú charakteristiky všetkých nábojov – viazaných v látke (polarizácia látky), pohybujúcich sa v látke (elektrický prúd vo vodičoch, elektrostatický náboj) i izolovaných mimo látky (napr. elektróny vyletujúce z katódy elektrónky). Takto sformulované Maxwellove rovnice sa niekedy nazývajú aj Lorentzovými Maxwellovými rovnicami a vo svojej forme jasne oddeľujú veličiny látky od veličín elektromagnetického poľa.

Objemovú hustotu energie mikroskopického elektromagnetického poľa možno upraviť do jednoduchšieho a fundamentálnejšieho tvaru, ako to bolo v prípade makroskopického poľa. Vychádzajúc zo vzťahu (11.2.3.9), v ktorom zameníme makroskopické pole za mikroskopické a využijeme vzťahy $\boldsymbol{d} = \varepsilon_o \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b}/\mu_o$ nachádzame vyjadrenie:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon_o \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_o} \boldsymbol{b} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}.$$

Jeho integrovaním podľa času, s uvážením identity

$$\int_0^t \boldsymbol{a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} \mathrm{d}t = \int_0^{\boldsymbol{a}(t)} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2} \boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t)$$

nachádzame výsledný vzťah pre hustotu energie elektromagnetického poľa:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_o |\boldsymbol{e}|^2 + \frac{1}{2} \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{\mu_o} . \tag{11.2.4.1b}$$

Vo vákuu niet voľných, ani viazaných elektrických nábojov, a netečú v ňom elektrické prúdy. Preto v Maxwellových rovniciach pre vákuum tieto veličiny nevystupujú. Vo vákuu preto nie je rozdiel medzi mikroskopickými a makroskopickými veličinami poľa a preto môžeme opäť používať zaužívané značenie veľkými písmenami:

$\mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = 0$	(11.2.4.2)
$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$	(11.2.4.3)
$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$	(11.2.4.4)
$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$	(11.2.4.5)

Z rovníc obsahujúcich rotáciu vyplýva, že aj vo vákuu zmena elektrického poľa má za následok vznik magnetického poľa a naopak. Rovnice s divergenciou potvrdzujú, že vo vákuu ani magnetické, ale ani elektrické pole nemá žriedla. Takto upravené rovnice využijeme v ďalšom článku na odvodenie diferenciálnej rovnice opisujúcej elektromagnetické vlnenie.

Kontrolné otázky

1. *Ktoré skutočnosti ovplyvňujú zmenu Maxwellových rovníc pri ich formulácii vo vákuu?*
2. *Napíšte Maxwellove rovnice, ktoré sú vo vákuu a v prostredí rovnaké.*
3. *Reprodukujte postup pri zmene štvrtej Maxwellovej rovnice na rovnicu platnú vo vákuu.*

11.3 Elektromagnetické vlnenie

Kľúčové slová
Elektromagnetické vlnenie, vlnová rovnica, rýchlosť elektromagnetických vĺn, rovinná vlna, guľová vlna, polarizácia elektromagnetickej vlny, Poyntingov vektor

11.3.1 Vlnová rovnica elektromagnetického vlnenia

Vlnovú rovnicu možno odvodiť z Maxwellových rovníc. Z tohto hľadiska najjednoduchší je prípad elektromagnetického vlnenia vo vákuu. Preto budeme vychádzať z rovníc (11.2.4.2) až (11.2.4.5), odvodených v predchádzajúcom článku.

Vlnovú rovnicu, v ktorej vystupuje vektor $\boldsymbol{E}$ získame, keď najprv aplikujeme operátor nabla na ľavú aj pravú stranu rovnice (11.2.4.4) ako rotáciu:

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{E} = \text{rot}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right). \qquad (11.3.1.1)$$

Úpravou ľavej strany, s využitím vzorca na rozpis dvojnásobného vektorového súčinu dostaneme:

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{E} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{E} = \text{grad div}\,\boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E},$$

lebo $\text{div}\,\boldsymbol{E} = 0$. Pritom

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{E} =$$

$$= -\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 z^2}\right). \qquad (11.3.1.2)$$

Pravú stranu rovnice (11.3.1.1) upravíme tak, že najprv vymeníme poradie derivácií podľa priestorových premenných a časovej premennej, potom dosadíme za $\text{rot}\boldsymbol{B}$ výraz z Maxwellovej rovnice (11.2.4.5):

$$\text{rot}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\text{rot}\,\boldsymbol{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \qquad (11.3.1.3)$$

Upravené vzťahy (11.3.1.2) a (11.3.1.3) vrátime do rovnice (11.3.1.1):

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 z^2} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \qquad (11.3.1.4)$$

čím sme dostali *parciálnu diferenciálnu rovnicu* pre vektor $\boldsymbol{E}$. Rovnakú rovnicu by sme dostali pre vektor $\boldsymbol{B}$, keby sme postup zopakovali, ale začínali by sme s rovnicou (11.2.4.5).

Rovnica (11.3.1.4) sa svoju formou zhoduje s parciálnou diferenciálnou rovnicou opisujúcou mechanické vlnenie – **vlnovou rovnicou** (pozri 6.2.2.9):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

v ktorej $u(x,y,z,t)$ je funkcia troch priestorových súradníc a času, predstavujúca výchylku vlnenia, a c je fázová rýchlosť vlnenia. Porovnaním týchto rovníc získame predovšetkým výsledok poukazujúci na to, že vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ môžu predstavovať ekvivalent výchylky vlnenia. Navyše porovnaním členov na pravej strane získavame informáciu o rýchlosti šírenia týchto vĺn:

$$\frac{1}{c^2}=\varepsilon_o\mu_o \quad \Rightarrow \quad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}, \qquad (11.3.1.5)$$

z čoho po dosadení hodnôt konštánt $\varepsilon_o = 8{,}8542\times10^{-12}$ F/m a $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ H/m pre rýchlosť elektromagnetických vĺn dostaneme

$$c = 2{,}998\times10^{8}\ \mathrm{m/s}. \qquad (11.3.1.6)$$

Táto rýchlosť sa zhoduje s rýchlosťou svetla, ktorej približná hodnota bola známa už v 17. storočí. Experimentálny dôkaz existencie elektromagnetických vĺn poskytol pokus zostavený H. R. Hertzom v roku 1886, ale teoretické práce, z ktorých vyplynula ich existencia, Maxwell publikoval už o 20 rokov skôr.

Príklad 11.3.1.1 Vyjadrite rozmery konštánt ε_o a μ_o pomocou rozmerov základných jednotiek SI a ukážte, že výraz $1/(\varepsilon_o\mu_o)^{1/2}$ má rozmer rýchlosti m/s!

Riešenie: Rozmer konštanty ε_o získame z Coulombovho zákona:
$F = (1/4\pi\varepsilon_o)(Q_1 Q_2)/ r^2$, odkiaľ $[\varepsilon_o] = (A^2 s^2)(m^{-2})(s^2)(kg^{-1} m^{-1}) = A^2 s^2 kg^{-1} m^{-3}$.
Rozmer konštanty μ_o získame zo vzťahu vyjadrujúceho magnetickú silu pôsobiacu medzi dvomi rovnobežnými dlhými vodičmi $F = (\mu_o I_1 I_2)/(2\pi r)$, odkiaľ
$[\mu_o] = kg\ m\ s^{-2}A^{-2}$. Súčin týchto rozmerov: $[\varepsilon_o][\mu_o] = s^2\ m^{-2}$. Odmocnina z prevrátenej hodnoty tohto výrazu je rozmer rýchlosti m/s.

Kontrolné otázky

1. *Z ktorých Maxwellových rovníc možno odvodiť vlnovú rovnicu pre vektor **E**?*
2. *Z ktorých Maxwellových rovníc možno odvodiť vlnovú rovnicu pre vektor **B**?*
3. *Aký fyzikálny rozmer má súčin permitivity vákua s permeabilitou vákua?*
4. *Kto a kedy experimentálne dokázal existenciu elektromagnetických vĺn?*
5. *Aká je hodnota fázovej rýchlosti elektromagnetických vĺn vo vákuu?*

11.3.2 Rovinná elektromagnetická vlna

Vlnová rovnica (11.3.1.4) má rôzne riešenia, ale za najvýznamnejšie považujeme riešenia v tvare **rovinnej vlny** a v tvare **guľovej vlny**. Ideálna guľová elektromagnetická vlna je vyžarovaná bodovým zdrojom. Reálny zdroj (napr. malá vysielacia anténa, ale aj oscilujúci elektrický dipól alebo elektrický náboj pohybujúci sa so zrýchlením) má však konečné rozmery a priestorom sa z neho šíria vlnoplochy, ktoré guľový tvar nadobúdajú až vo vzdialenosti niekoľkonásobne presahujúcej rozmery antény. V dostatočnej vzdialenosti od zdroja je krivosť týchto vlnoplôch už pomerne malá a v priblížení môžeme ich malé časti považovať za rovinné. Preto aj rovinná vlna je len istou idealizáciou reálneho prípadu. Na opis vlastností elektromagnetického vlnenia je však veľmi výhodná.

Súradnicovú sústavu si možno zvoliť tak, aby napr. os x mala smer šírenia rovinnej vlny. V takom prípade vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ elektromagnetickej vlny budú závisieť iba od dvoch premenných – času t a priestorovej súradnice x. Napríklad pre vektor $\boldsymbol{E}$ harmonickej elektromagnetickej vlny môžeme potom napísať rovnicu:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_o \sin(\omega t - kx), \qquad (11.3.2.1)$$

kde ω je uhlová frekvencia vlny, $k = 2\pi/\lambda$ uhlové vlnové číslo a λ jej vlnová dĺžka. Vektor $\boldsymbol{E}_o$ predstavuje amplitúdu vlny, pričom na smer šírenia vlny je kolmý. To, že je na smer šírenia kolmý, bude teraz predmetom podrobnejšej analýzy.

V prvom kroku sa presvedčíme, že vlna elektrického poľa (11.3.2.1) spĺňa vlnovú rovnicu (11.3.1.4) pre ľubovoľný konštantný vektor $\boldsymbol{E}_o$. Vlnová rovnica obsahuje parciálne derivácie podľa času a podľa priestorových premenných. V tomto prípade sú derivácie podľa premenných y a z nulové, treba vypočítať len derivácie podľa premenných x a t:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{E}_o \frac{\partial}{\partial t}\sin(\omega t - kx) = \omega \boldsymbol{E}_o \cos(\omega t - kx), \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \boldsymbol{E}_o \sin(\omega t - kx),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = \boldsymbol{E}_o \frac{\partial}{\partial x}\sin(\omega t - kx) = -k \boldsymbol{E}_o \cos(\omega t - kx), \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} = -k^2 \boldsymbol{E}_o \cos(\omega t - kx),$$

Porovnaním druhých derivácií nájdeme, že vlnová rovnica je splnená, ak vlnové číslo k a uhlová frekvencia vlnenia ω sú spojené vzťahom $\omega = c\,k$, kde c je rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny (11.3.1.5).

To, že elektrická vlna spĺňa vlnovú rovnicu je len nevyhnutnou a nie postačujúcou podmienkou na to, aby táto vlna predstavovala riešenie Maxwellových rovníc. V druhom kroku ukážeme, že konštantný vektor $\boldsymbol{E}_o = E_{0,x}\boldsymbol{i} + E_{0,y}\boldsymbol{j} + E_{0,z}\boldsymbol{k}$ musí byť kolmý na smer šírenia vlny daný v našom prípade osou x, t. j. jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$. Použijeme pritom prvú Maxwellovu rovnicu (11.2.4.2):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial \mathrm{z}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial E_x}{\partial x} = E_{o,x}\frac{\partial}{\partial x}\sin(\omega t - kx) = 0$$

Z uvedeného vidno, že zložka $E_{0,x}$ musí byť nulová, nenulové môžu byť len ostatné dve zložky konštantného vektora $\boldsymbol{E_o}$. Na základe týchto výsledkov tvrdíme, že **vektor $\boldsymbol{E_0}$** *rovinnej elektromagnetickej vlny* vystupujúci v rovnici, ***je kolmý na smer šírenia vlny***.

V poslednom kroku ukážeme, že elektrická vlna (11.3.2.1) je nevyhnutne sprevádzaná magnetickou vlnou:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_o \sin(\omega t - kx), \tag{11.3.2.2}$$

kde konštantný vektor $\boldsymbol{B}_o$ je kolmý na smer šírenia $\boldsymbol{i}$ aj vektor $\boldsymbol{E}_o$ a jeho veľkosť je jednoznačne určená elektrickou časťou vlny. Na tento cieľ využijeme tretiu Maxwellovu rovnicu (11.2.4.4):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \boldsymbol{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} + \boldsymbol{k}\frac{\partial B_z}{\partial t}\right).$$

Determinant rozpíšeme, pričom si uvedomíme, že na základe rovníc (11.3.2.1), derivácie podľa premenných y a z sa rovnajú nule. Tak dostaneme rovnicu:

$$-\boldsymbol{j}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \boldsymbol{k}\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \boldsymbol{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} + \boldsymbol{k}\frac{\partial B_z}{\partial t}\right). \tag{11.3.2.3}$$

Na ľavej strane rovnice chýba zložka rovnobežná s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$. Preto aj na pravej strane rovnice musí byť táto zložka nulová. Z toho vyplýva, že parciálna derivácia B_x podľa času sa rovná nule. Preto zložka B_x nezávisí od času. Keďže hovoríme o vlnách, nie o statických poliach, je korektné považovať túto zložku vektora $\boldsymbol{B}$ rovinnej elektromagnetickej vlny, šíriacej sa v smere osi x za nulovú. Na základe týchto výsledkov tvrdíme, že aj **vektor $\boldsymbol{B}$** *rovinnej elektromagnetickej vlny* vystupujúci v rovnici, má len zložky v smere osí y a z , takže ***je kolmý na smer šírenia vlny***.

Nakoniec nájdeme explicitný vzťah medzi magnetickou a elektrickou časťou vlny, už len využitím rovnice (11.3.2.3). Jej skalárnym prenásobením s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{j}$ dostaneme:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = E_{o,z}\frac{\partial}{\partial x}\sin(\omega t - kx) = -kE_{o,z}\cos(\omega t - kx)$$

Integrovaním posledného výrazu podľa času vypočítame od času závislú zložku magnetickej indukcie:

$$B_y(x,t) = -\frac{k}{\omega}E_{o,z}\sin(\omega t - kx) \Rightarrow B_{y,0} = -\frac{k}{\omega}E_{o,z}$$

Od času nezávislú integračnú konštantu považujeme za nulovú z rovnakých dôvodov, aké sme spomenuli pri zložke $B_{x,0}$. Prenásobením rovnice (11.3.2.3) s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{k}$ a rovnakou úpravou ako v poslednej rovnici získame

$$B_z(x,t) = \frac{k}{\omega} E_{o,y} \sin(\omega t - kx) \Rightarrow B_{z,0} = \frac{k}{\omega} E_{o,y}$$

Posledné dva výsledky pre zložky konštantného vektora magnetickej časti vlny $\boldsymbol{B}_o$ môžeme napísať vo vektorovom zápise v tvare:

$$\boldsymbol{B_0} = \frac{1}{c} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E_0}, \qquad (11.3.2.4)$$

čím sme ukázali, že prítomnosť elektrickej vlny s amplitúdou danou vektorom $\boldsymbol{E}_o$ si nevyhnutne vyžaduje prítomnosť magnetickej vlny, ktorej amplitúda $\boldsymbol{B}_o$ má už jednoznačne určený smer aj veľkosť. Podľa výsledku (11.3.2.4) vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{E}$ v rovinnej elektromagnetickej vlne sú navzájom na seba kolmé a v danom poradí tvoria pravotočivú sústavu. Pritom vektor $\boldsymbol{i}$ má smer šírenia vlny.

Ak si vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ zachovávajú svoj smer (v danom bode priestoru ktorým vlna prechádza), t. j. s časom sa ich smer nemení, vlna je **lineárne polarizovaná**. To je prípad rádiových vĺn, najmä z pásma veľmi krátkych vĺn. Pokiaľ ide o svetelné vlny, v danom bode priestoru môžu tieto vektory meniť smer náhodne, alebo vlna môže byť polarizovaná lineárne, ale aj inak, o čom sa podrobnejšie píše v kapitole o optike.

Príklad 11.3.2.1 Dosadením do vlnovej rovnice si overte, že aj magnetická vlna (11.3.2.2) s $B_{y,0} = A, B_{z,0} = 0$ je riešením vlnovej rovnice.

Riešenie: Vlnová rovnica obsahuje parciálne derivácie vektora $\boldsymbol{B}$ podľa času a podľa priestorových premenných. Aj v tomto prípade sú derivácie podľa premenných y a z nulové, treba vypočítať len derivácie podľa premenných x a t:
$(\partial \boldsymbol{B} / \partial t) = \boldsymbol{j} A\ \omega \cos(\omega t - \omega x/c)$, $(\partial^2 \boldsymbol{B} / \partial t^2) = -\boldsymbol{j} A\ \omega^2 \sin(\omega t - \omega x/c)$
$(\partial \boldsymbol{B} / \partial x) = -\boldsymbol{j} A\ (\omega/c) \cos(\omega t - \omega x/c)$, $(\partial^2 \boldsymbol{B} / \partial x^2) = -\boldsymbol{j} A\ (\omega/c)^2 \sin(\omega t - \omega x/c)$.
Porovnaním získame vzťah $(\partial^2 \boldsymbol{B} / \partial x^2) = (1/c^2)\ (\partial^2 \boldsymbol{B} / \partial t^2)$, čo znamená, že magnetická vlna je riešením diferenciálnej rovnice vlnenia.

Príklad 11.3.2.2 Nech pre súradnice vektora $\boldsymbol{E}$ rovinnej elektromagnetickej vlny platia vzťahy $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = 2 \cos [\pi \times 10^{15} (t - x/c)]$. Napíšte vzťahy pre súradnice vektora $\boldsymbol{B}$ tejto vlny.

Riešenie: Zo zápisu súradníc vektora $\boldsymbol{E}$ vyplýva, že vlna sa šíri rovnobežne s osou x, vektor $\boldsymbol{E}$ osciluje rovnobežne s osou z , preto ho možno vyjadriť ako $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{k}\, E_z$. Medzi vektormi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$ v rovinnej vlne platí vzťah (11.3.2.6):
$\boldsymbol{B} = (1/c)\ (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E}) = (1/c)\ (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}\ E_z) = -(1/c)\ \boldsymbol{j}\ E_z)$. Preto vektor $\boldsymbol{B}$ má zložku len v smere osi y : $B_x = 0$, $B_y = -(1/c)\ 2 \cos [\pi \times 10^{15} (t - x/c)]$, $B_z = 0$.

Príklad 11.3.2.3 Vektor ***E*** rovinnej elektromagnetickej vlny má amplitúdu veľkosti 2×10^{-4} V/m. Vypočítajte amplitúdu vektora ***B***.

Riešenie: Použijeme vzťah (11.3.2.6), z ktorého pre veľkosti vektorov platí $B = E / c$. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme $B = 6{,}66 \times 10^{-13}$ T.

Kontrolné otázky

1. *Kedy by ste elektromagnetickú vlnu považovali za rovinnú?*
2. *Prečo v rovinnej vlne, ktorá sa šíri pozdĺž osi* x *, zložky vektora* ***E*** *nezávisia od priestorových súradníc y a z?*
3. *Ako sú navzájom orientované vektory* ***E*** , ***B*** *a smer šírenia rovinnej vlny?*
4. *Ako by ste dokázali, že vektory* ***B*** a ***E*** *v rovinnej vlne sú na seba kolmé?*
5. *Aká je to lineárne polarizovaná vlna?*

11.3.3 Poyntingov vektor

Je to vektor, ktorý svojou veľkosťou predstavuje hustotu toku energie, ktorú prenáša elektromagnetická vlna. Inak povedané – ide o veličinu vyjadrujúcu, koľko energie prenesie elektromagnetická vlna cez plochu s jednotkovým obsahom za jednotku času (plocha musí byť postavená kolmo na smer šírenia vlny). Poyntingov vektor $\boldsymbol{P}_\mathrm{S}$ sa vyjadruje vzťahom

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \,, \qquad (11.3.3.1)$$

kde $\boldsymbol{E}$ je vektor intenzity elektrického poľa a $\boldsymbol{H}$ vektor intenzity magnetického poľa v príslušnej elektromagnetickej vlne. Z fyzikálnych rozmerov vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ vyplýva, že rozmer Poyntingovho vektora je watt na štvorcový meter:

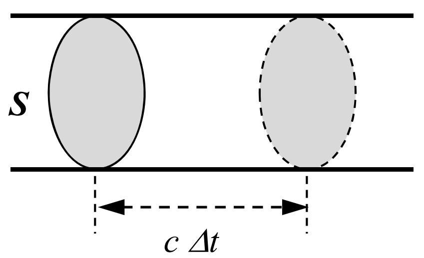
$$[P_\mathrm{S}] = [E][H] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \,. \qquad (11.3.3.2)$$

Rozmerom veličiny sa potvrdzuje, že ide o prenos výkonu cez plochu s jednotkovým plošným obsahom.

Táto veličina – (plošná) hustota toku elektromagnetickej energie – má aj pomenovanie **intenzita elektromagnetického vlnenia**.

Poznámka: *Poyntingov vektor sa v norme STN ISO 31, i v rade novších publikácií, označuje písmenom* ***S****. V minulosti sa používalo aj písmeno* ***P****. Vzhľadom na označovanie vektora priradeného ploche (****S****), ktoré sa používa v celom tomto texte, nie* *iba v tejto kapitole, pre Poyntingov vektor je použité označenie* $\boldsymbol{P}_S$ *. Na označenie výkonu sa naďalej bude používať písmeno P, teda bez indexu* s.

Vzhľadom na význam tejto veličiny je potrebné podrobnejšie sa zaoberať odvodením vzťahu (11.3.3.1). Vzťah odvodíme zjednodušeným spôsobom. Predstavíme si potrubie, ktorým prúdi médium (plyn, kvapalina), v ktorom na objemovú jednotku nech pripadá energia w (J/m^3). Médium nech prúdi potrubím rýchlosťou c , potrubie nech má prierez S . Za časový interval Δt médium postúpi potrubím o dĺžku $c\,\Delta t$, takže zaplní objem $S\,c\,\Delta t$.



Obr. 11.3.3.1

Vynásobením tohto objemu objemovou hustotou energie w dostaneme energiu, ktorú médium prenieslo prierezom S za časový interval Δt :

$$W = wSc\Delta t\,.$$

Keď túto energiu vydelíme plošným obsahom prierezu S a časovým intervalom Δt , dostaneme veličinu, vyjadrujúcu koľko energie médium prenieslo jednotkovým plošným obsahom za jednotku času, t. j. hustotu toku energie P_S :

$$P_\mathrm{S} = \frac{W}{S\Delta t} = \frac{wSc\Delta t}{S\Delta t} = cw\,. \qquad (11.3.3.3)$$

Do získaného vzťahu môžeme dosadiť objemovú hustotu energie elektromagnetického poľa podľa vzťahu (11.2.3.9):

$$w = (1/2)ED + (1/2)BH\,. \qquad (11.3.3.4)$$

Predpokladali sme, že ide o izotropné prostredie, v ktorom je vektor $\boldsymbol{E}$ rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{D}$ a vektor $\boldsymbol{B}$ s vektorom $\boldsymbol{H}$, takže namiesto ich skalárneho súčinu možno napísať len súčin ich veľkostí. Vzťah vyjadrujúci hustotu energie ďalej upravíme pre prípad rovinnej elektromagnetickej vlny, v ktorej pre veľkosti vektorov $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$ platí $B = E/c$ (pozri 11.3.2.6). Tento vzťah ešte upravíme pre prípad vo vákuu, kde platí $D = \varepsilon_o E$ a $B = \mu_o H$:

$$B = \frac{E}{c} \;\Rightarrow\; \mu_o H = \frac{E}{c} \;\Rightarrow\; \mu_o H = E\sqrt{\varepsilon_o \mu_o} \;\Rightarrow\; \sqrt{\mu_o}H = \sqrt{\varepsilon_o}E \;\Rightarrow\; \mu_o H^2 = \varepsilon_o E^2\,.$$

Výsledok využijeme pri úprave vzťahu vyjadrujúceho hustotu toku energie:

$$P_\mathrm{S} = cw = c\frac{1}{2}(ED + HB) = \frac{c}{2}(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2) = c\varepsilon_o E^2 = c\sqrt{\varepsilon_o}E\sqrt{\mu_o}H = EH\,.$$

Získali sme vzťah vyjadrujúci veľkosť hustoty toku elektromagnetickej energie:

$$P_\mathrm{S} = EH\,. \qquad (11.3.3.5)$$

Vzťah nezohľadňuje vektorový charakter tejto veličiny. Keď si uvedomíme aké sú vzájomné orientácie vektorov $\boldsymbol{P}_\mathrm{S}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ (resp. $\boldsymbol{B}$) v rovinnej vlne, môžeme tento vzťah napísať vo vektorovom tvare:

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \,. \qquad (11.3.3.6)$$

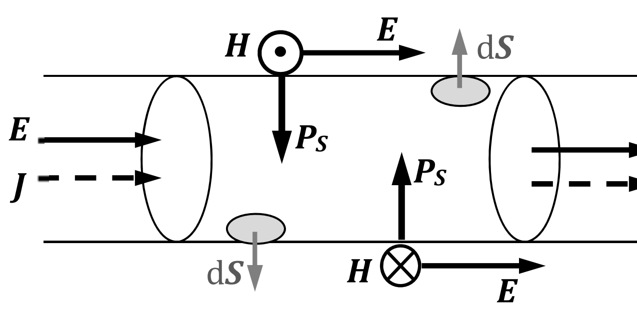
Precízny spôsob odvodenia tohto vzťahu – teda odvodenie Poyntingovho vektora – nájdete v dodatku D2.

Príklad 11.3.3.1 Odporová špirála je zhotovená z drôtu s priemerom d = 0,6 mm a dĺžkou ℓ = 2 m. Jej elektrický odpor je 5 Ω a prechádza ňou prúd I = 2 A. Vypočítajte veľkosť Poyntingovho vektora, vyjadrujúceho príkon elektromagnetickej energie do vodiča jeho povrchom.

Riešenie: Joulove straty v špirále predstavujú príkon $RI^2 = 20\,\mathrm{W}$. Tieto straty sú kompenzované prítokom elektromagnetickej energie povrchom špirály, ktorý má veľkosť $S = 2\pi r\ell = 3{,}77\times10^{-2}\ \mathrm{m}^2$. Keď vydelíme Joulove straty veľkosťou povrchu špirály, dostaneme veľkosť Poyntingovho vektora:
$P_\mathrm{S} = 20\ \mathrm{W} / 3{,}77\times10^{-2}\ \mathrm{m}^2 = 530{,}5\ \mathrm{W/m}^2$.

Príklad 11.3.3.2 Dlhým priamym vodičom s kruhovým prierezom prechádza elektrický prúd I. Overte si, že v takomto prípade Poyntingov vektor smeruje dovnútra vodiča – zo všetkých strán jeho valcového plášťa.

Riešenie: Elektrický prúd je vyvolaný elektrickým poľom s intenzitou $\boldsymbol{E}$, pričom vodičom prechádza prúd s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$. Elektrické pole existuje aj mimo vodiča. Tečúci prúd vytvára v okolí vodiča magnetické pole, ktorého smer určíme z Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzorca. Nad vodičom (na obrázku) vektor intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ smeruje pred obrázok, pod vodičom za obrázok. Vektorový súčin $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ smeruje v obidvoch prípadoch dovnútra vodiča.



Obr. 11.3.4.1

Kontrolné otázky

1. *Čo vyjadruje Poyntingov vektor?*
2. *Napíšte vzťah, ktorým sa definuje Poyntingov vektor.*
3. *Ako súvisí Poyntingov vektor s hustotou elektromagnetickej energie?*
4. *Na základe vzťahu vyjadrujúceho Poyntingov vektor ukážte, aký má fyzikálny rozmer.*
5. *Aký smer má Poyntingov vektor na povrchu vodiča, ktorým prechádza elektrický prúd?*

11.3.4 Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny

V pomerne veľkej vzdialenosti od zdroja možno obmedzenú časť vlnoplochy elektromagnetickej vlny považovať za rovinnú – napríklad vo vzdialenosti niekoľkých kilometrov od vysielacej antény – v blízkosti prijímača. Vzťah (11.3.3.1) vyjadrujúci Poyntingov vektor:

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \qquad (11.3.4.1)$$

platí všeobecne, bez ohľadu na tvar vlnoplochy. V prípade rovinnej vlny nadobúda osobitný tvar, ktorý je užitočný nielen pri rozhlasových vlnách, ale aj v optike, pri posudzovaní energie prenášanej svetlom. Pre rovinnú vlnu bol odvodený vzorec (11.3.2.6), vyjadrujúci vzťah medzi vektormi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E}\,,$$

z ktorého vyplýva, že medzi vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ existuje podobný vzťah:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E}\,. \qquad (11.3.4.2)$$

Výsledok dosadíme do vzťahu (11.3.4.1):

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 c}[\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E})] = \frac{1}{\mu_0 c}[\boldsymbol{i}E^2 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E})]\,.$$

Skalárny súčin $(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E}) = 0$, lebo v rovinnej vlne je vektor $\boldsymbol{E}$ kolmý na smer šírenia vlny, v tomto prípade opísanom jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$. Preto Poyntingov vektor rovinnej vlny má tvar:

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{i}\left(\frac{1}{\mu_0 c}\right)E^2 = \boldsymbol{i}(\varepsilon_o c)E^2 = \boldsymbol{i}\sqrt{\varepsilon_o/\mu_0}\,E^2\,. \qquad (11.3.4.3)$$

Všetky tri vyjadrenia sú rovnocenné, lebo pre rýchlosť elektromagnetických vĺn platí vzťah $c^2 = 1/(\varepsilon_o \mu_o)$, pomocou ktorého možno uvedené vyjadrenia získať (pozri vzťah 11.3.1.5).

Vzťah (11.3.4.3) vyjadruje okamžitú hodnotu Poyntingovho vektora. Ak ide o harmonickú elektromagnetickú vlnu, vektor $\boldsymbol{E}$ periodicky mení svoju veľkosť a smer, takže aj veľkosť Poyntingovho vektora sa periodicky mení. Frekvencie elektromagnetických vĺn, s ktorými sa stretávame sú také vysoké, že oscilácie Poyntingovho vektora zmyslami nedokážeme vnímať. Napríklad pri svetle vnímame akúsi priemernú hodnotu, ktorú možno vyjadriť pomocou amplitúdy vektora intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$. Vypočítame ju ako strednú hodnotu veľkosti Poyntingovho vektora počas jednej periódy. Pritom budeme predpokladať, že vektor $\boldsymbol{E}$ sa v danom mieste elektromagnetického poľa (napríklad pri prijímači, alebo v oku) mení podľa funkcie sínus: $E_z = E_o \sin(\omega t + \varphi)$, kde E_o je amplitúda (maximálna hodnota) jeho veľkosti. Potom:

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_\mathrm{o}}} E_\mathrm{z}^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_\mathrm{o}}} E_\mathrm{o}^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_\mathrm{o}}} E_\mathrm{o}^2\,,$$

takže

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_o/\mu_\mathrm{o}}\, E_\mathrm{o}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o c E_\mathrm{o}^2\,. \qquad (11.3.4.4)$$

Stredná hodnota Poyntingovho vektora rovinnej harmonickej vlny je preto úmerná druhej mocnine amplitúdy vektora $\boldsymbol{E}$.

Príklad 11.3.4.1 Dokážte, že stredná hodnota Poyntingovho vektora sa dá vyjadriť vzťahom $\langle P_S \rangle = (1/2)B_\mathrm{o}^2/(\mu_\mathrm{o} c)$, kde B_o je amplitúda magnetickej zložky harmonickej elektromagnetickej vlny.

Riešenie: Veľkosť Poyntingovho vektora vyjadríme vzťahom $P_\mathrm{S} = EH$ (11.3.3.5), ktorý upravíme pre prípad rovinnej vlny. Namiesto veľkosti vektora E dosadíme veľkosť vektora B , ktorú získame zo vzťahu (11.3.2.6) upraveného pre veľkosti týchto vektorov $E = B\,c$:

$P_\mathrm{S} = EH = B\,c\,H = B\,c\,(B/\mu_\mathrm{o}) = (c/\mu_\mathrm{o})B^2$. Toto je vzťah vyjadrujúci okamžitú hodnotu Poyntingovho vektora. Strednú hodnotu v prípade harmonickej vlny získame postupom, ktorý bol použitý pri odvodení vzťahu (11.3.4.4).

Príklad 11.3.4.2 Hélium – neónový laser vysiela zväzok monochromatického svetla, ktorý má kruhový prierez s polomerom $R = 1$ mm , pričom jeho intenzita je v celom priereze rovnaká. Celkový priemerný výkon lasera je $P = 3{,}5$ mW a vlnová dĺžka $\lambda = 633$ nm. Vypočítajte a) frekvenciu f monochromatického svetla, b) amplitúdu elektrickej a magnetickej zložky príslušnej elektromagnetickej vlny.

Riešenie: a) Frekvencia f monochromatickej vlny súvisí s vlnovou dĺžkou λ a fázovou rýchlosťou c vzťahom $c = \lambda f$. Preto $f = c/\lambda = (3\times10^8\ \mathrm{m/s}) / (633\times10^{-9}\ \mathrm{m}) = 4{,}74\times10^{14}$ Hz

b) Ak výkon lasera $P = 3{,}5$ mW pripadá na celý prierez lúča, potom stredná hodnota Poyntingovho vektora v lúči je $\langle P_S \rangle = P / (\pi R^2)$. Stredná hodnota Poyntingovho vektora harmonickej vlny sa na druhej strane počíta podľa vzťahu 11.3.4.4 a podľa vzťahu z príkladu 11.3.4.1. Preto $P / (\pi R^2) = (1/2)(c/\mu_o)\, B_o^2 = (1/2)(\varepsilon_o c) E_o^2$. Z týchto vzťahov môžeme vypočítať amplitúdy elektrickej aj magnetickej zložky elektromagnetickej vlny: $E_o = 915{,}6$ V/m , $B_o = 3{,}06\times10^{-6}$ T.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte vzťah vyjadrujúci Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny.*
2. *Napíšte vzťah vyjadrujúci strednú hodnotu Poyntingovho vektora harmonickej vlny.*
3. *Možno strednú hodnotu Poyntingovho vektora harmonickej vlny vyjadriť pomocou amplitúdy jej magnetickej zložky?*

DODATKY

D1 Komentár k Faradayovmu vzorcu

Faraday experimentálne zistil, že indukované elektrické napätie v uzavretej slučke súvisí so zmenou magnetického toku cez plochu ohraničenú touto slučkou, a to podľa vzťahu

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1}$$

Tento vzťah platí nielen vtedy, keď je slučka v pokoji a mení sa len magnetický tok, ale aj vtedy, keď sa slučka vzhľadom na pozorovateľa pohybuje. Ukážeme, že táto rovnica vedie k dvom odlišným príspevkom tvoriacim celkové indukované napätie.

Budeme uvažovať krátky prírastok času Δt; plochu, ktorú ohraničuje slučka v čase t budeme označovať $S(t)$ a plochu, ktorú ohraničuje slučka v čase $t + \Delta t$ ako $S(t + \Delta t)$. Analogicky krivky, ktoré ich ohraničujú, t. j. samotné slučky budeme označovať ako $K(t)$ a $K(t + \Delta t)$ (obrázok na konci dodatku). Predpokladáme, že magnetické pole sa počas tohto časového intervalu zmení z $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ na $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t + \Delta t)$. Pomocou Taylorovho rozvoja magnetického pola vzhľadom na malý prírastok času môžeme zmenu magnetického toku cez plochu ohraničenú slučkou vyjadriť nasledovne:

$$\Delta\Phi = \iint_{S(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t+\Delta t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \tag{2}$$

$$= \iint_{S(t+\Delta t)} \left[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\Delta t\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= \iint_{S(t+\Delta t)} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\Delta t\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{S(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{3}$$

Nech lokálna rýchlosť elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ slučky je opísaná vektorom rýchlosti $\boldsymbol{v}$ (obrázok na konci textu). Potom rozdiel dvoch posledných integrálov vo vzťahu (3) (cez rôzne plochy ale s rovnakým integrandom) vyjadríme nasledovne: za prírastok času Δt sa element $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ posunie o $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}\Delta t$ a teda predstavuje prírastok plochy $S(t)$ daný veľkosťou vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ elementu plochy

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\Delta t \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \tag{4}$$

t. j.

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S(t+\Delta t)-S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot(\boldsymbol{v}\Delta t \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}) =$$

$$= -\Delta t \oint_{K(t)} \big(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\big)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

V poslednej úprave sme využili symetriu zmiešaného súčinu vzhľadom na permutácie súčiniteľov, ako aj skutočnosť, že prírastok plochy sa získa súčtom (integrálom) malých prírastkov pozdĺž celej slučky.

Pre indukované napätie tak dostávame výsledok

$$U_i = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\iint_{S(t)} \frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{K(t)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

Nakoniec, použitím Maxwellovej rovnice

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

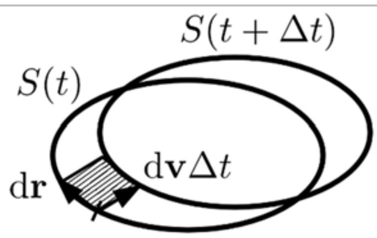
a Stokesovej vety

$$\iint_{S(t)} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{K(t)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

nájdeme

$$U_i = \oint_{K(t)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_{K(t)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Indukované napätie má teda dva rôzne príspevky – prvý od integrálu intenzity elektrického poľa po krivke zhodnej s uvažovanou slučkou a druhý od integrálu po tej istej krivke z intenzity magnetickej sily $\boldsymbol{E}_m = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$.



Infinitezimálnu zmenu plochy ohraničenej slučkou (deformácia, posunutie, pootočenie) sa rovná rozdielu dvoch plošných integrálov, ktorý možno vyjadriť ako krivkový integrál po krivke *K*(*t*). Elementárnym príspevkom je výraz $\boldsymbol{v}\Delta t \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

K integrálu $\oint_{\mathrm{K}(t)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ možno uviesť ďalší komentár. Podľa Stokesovej vety sa rovná plošnému integrálu cez plochu S ohraničenú krivkou K:

$$\oint_{\mathrm{K}(t)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

Výraz $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ predstavuje aplikáciu nabla operátora vektorovo na súčin funkcií. Pri aplikácii operátora by sme mali podľa súradníc *x, y, z* derivovať aj vektor $\boldsymbol{v}$, ale obmedzíme sa na prípad, že všetky elementy vodiča sa pohybujú rovnakou rýchlosťou, takže vektor $\boldsymbol{v}$ nie je funkciou priestorových súradníc. Z hľadiska derivácií predpísaných použitím operátora nabla, je teda vektor $\boldsymbol{v}$ konštantný. Preto k operátoru nabla pripíšeme index ∇_{B}, čo bude znamenať, že sa vzťahuje iba na vektor $\boldsymbol{B}$.

Preto platí:

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \nabla_{\mathrm{B}} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{v}\,(\nabla_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\mathrm{B}})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{B}\,,$$

lebo podľa Maxwellovej rovnice div$\boldsymbol{B}$ = 0. Takže pri uvedenom obmedzení na konštantnú rýchlosť môžeme plošný integrál napísať v tvare

$$\iint_{S} \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{\boldsymbol{S}} (\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

Z výsledku vyplýva, že pri danom obmedzení indukované napätie pri pohybe pevnej uzavretej slučky vzniká len v nehomogénnom poli, v ktorom grad$\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$.

D2 **Odvodenie Poyntingovho vektora**

Precízny spôsob odvodenia vzťahu (11.3.3.1) vychádza z výrazu p re zmenu objemovej hustoty energie elektromagnetického poľa (11.2.3.9). V elektromagnetickom poli zvolíme oblasť ohraničenú uzavretou plochou S a vypočítame zmenu energie W ktorá sa v nej nachádza ako objemový integrál hustoty energie w :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \iiint \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \mathrm{d}\tau\,.$$

Do posledného integrálu dosadíme vzťahy vyplývajúce z Maxwellových rovníc

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$$

a rozdelíme ho na dva integrály:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \iiint [\boldsymbol{E} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}]\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \iiint [\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}]\,\mathrm{d}\tau - \iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}\tau \tag{a}$$

Druhý integrál predstavuje Joulove straty v zvolenom objeme elektromagnetického poľa. V zjednodušenom prípade sa o tom možno presvedčiť jeho úpravou, keď si zvolíme objem v tvare valca s prierezom S a dĺžkou l, konštantnú hustotu elektrického prúdu $\boldsymbol{J}$ rovnobežnú s vektorom $\boldsymbol{E}$ a s osou valca. Potom:

$$\iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}\tau = E\,J\,Sl = (El)(JS) = UI = RI^2\,.$$

kde $El = U$ je elektrické napätie medzi základňami valca, $JS = I$ je prúd tečúci medzi základňami a R je príslušný elektrický odpor.

Prvý z dvoch integrálov si vyžaduje náročnejšiu úpravu. Preto si najprv vypočítame výraz $\operatorname{div}(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E})$. Operácia *divergencia* predpisuje derivácie, pričom výraz v zátvorke musíme derivovať ako súčin. Preto pri úprave budeme pri *operátore nabla* používať indexy symbolizujúce veličinu, na ktorú sa vzťahuje. Pri úpravách použijeme pravidlo o vzájomnej zámene skalárneho a vektorového súčinu v zmiešanom súčine:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) = \nabla_{\mathrm{H}} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) + \nabla_{\mathrm{E}} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) = (\nabla_{\mathrm{H}} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{E} - (\nabla_{\mathrm{E}} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{H} =$$

$$= \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$$

Do prvého z integrálov v rovnici (a) dosadíme namiesto $\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ výraz $\operatorname{div}(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E})$, a tak dostaneme:

$$\iiint [\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E}] \, \mathrm{d}\tau = \iiint \operatorname{div}(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) \mathrm{d}\tau = \oiint (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= - \oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \, .$$

pričom sme použili Gaussovu-Ostrogradského integrálnu vetu o premene objemového integrálu na plošný integrál. Táto plocha uzatvára zvolený objem v elektromagnetickom poli. Rovnica (a) tak dostane konečnú podobu:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = - \oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}) \, \mathrm{d}\tau \, . \tag{b}$$

V prvom integráli vystupuje Poyntingov vektor $\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, takže tento člen predstavuje únik elektromagnetickej energie cez uzavretú plochu za jednotku času.

Ak by sa Poyntingov vektor rovnal nule, v uzavretej ploche by ubúdalo elektromagnetickej energie len prostredníctvom Joulových strát. Ak by existovali Joulove straty, ale celková energia v objeme ohraničenom uzavretou plochou by sa nemenila, potom by platila rovnosť:

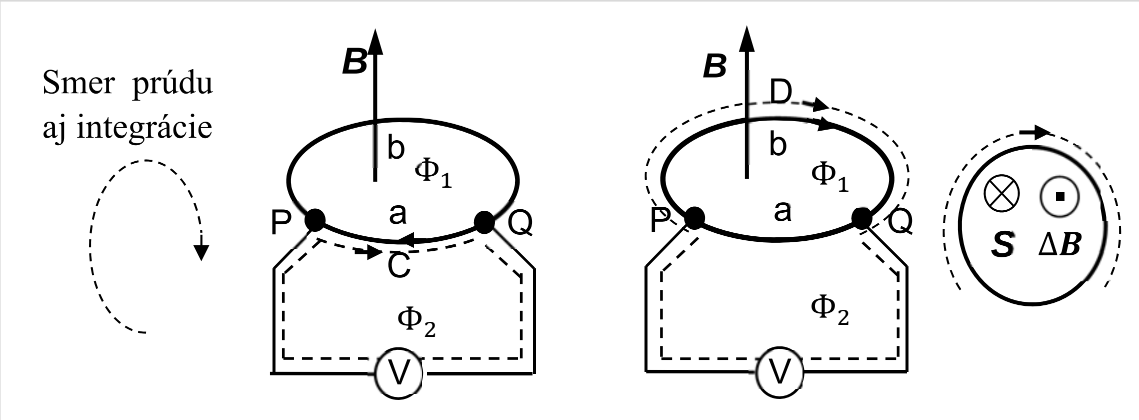
$$0 = - \oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}) \, \mathrm{d}\tau \;\Rightarrow\; \iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}) \, \mathrm{d}\tau = - \oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \, .$$

To znamená, že Joulove straty by mali byť kompenzované prítokom energie zvonku. Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ má podľa zaužívaných dohôd smer z uzavretej plochy von, a aby aj pravá strana bola kladná, vektor $\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ musí mať opačný smer ako vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, aby ich skalárny súčin $\boldsymbol{P}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ bol záporný. To znamená, že elektromagnetická energia vstupuje do uzavretej plochy zvonku.

Nakoniec uveďme, že rovnica (b) predstavuje bilančnú rovnicu pre energiu a fakt, že Maxwellove rovnice možno upraviť do tohto tvaru je argumentom, prečo podintegrálny výraz (11.2.3.9) považujeme za zmenu hustoty energie poľa.

D3 Meranie indukovaného napätia na prstenci

Snaha odmerať napätie na časti kruhového prstenca, v ktorom vznikol prúd elektromagnetickou indukciou, vedie na zaujímavý zdanlivý paradox. Posúdime vodivý kruhový prstenec s obvodom L a elektrickým odporom pripadajúcim na jednotku dĺžky ρ. Nech sa nachádza v magnetickom poli, ktorého magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ narastá. K bodom Q a P (podľa obrázku) pripojíme voltmeter, čím prstenec rozdelíme na dva úseky s dĺžkami a a b $(a + b = L)$. Ak prstencom tečie indukovaný prúd I, tak podľa Ohmovho zákona by na úsekoch mali byť napätia $U_a = I\rho a$, resp. $U_b = I\rho b$. Tak vzniká otázka, čo ukáže voltmeter.



Problém treba riešiť využitím rovníc platných v elektromagnetickom poli, tu len s Ohmovým zákonom nevystačíme. Indukované elektrické napätie v uzavretej slučke sa podľa Faradaya vyjadruje vzťahom

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1}$$

Toto napätie sa na druhej strane počíta ako krivkový integrál intenzity $\boldsymbol{E}$ indukovaného poľa po celej uzavretej slučke K, takže:

$$\oint_K \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2}$$

Ak uvažujeme len s prstencom bez pripojenia na voltmeter, tak na pravej strane rovnice (2) treba vziať do úvahy tok Φ_1, prechádzajúci plochou ohraničenou prstencom. Na ľavej strane rovnice je vtedy celkové indukovaná napätie U_i v prstenci, ktorého veľkosť vypočítame pomocou Ohmovho zákona na základe predpokladu, že prstencom tečie indukovaný prúd I : $U_i = I\rho L$. Keď sa smer integrácie zhoduje so smerom prúdu v prstenci (na obrázku šípka na čiarkovanej čiare), t. j. keď vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sú rovnobežné, tak integrál na ľavej strane rovnice (2) je kladný. Znamienko mínus na pravej strane rovnice vyplýva z opačného smeru vektorov $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{B}$ v skalárnom súčine vyjadrujúcom magnetický tok $\Phi = \iint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Smer vektora $\boldsymbol{S}$ bol pritom zvolený podľa pravidla pravej ruky vzhľadom na smer integrácie. Samotný výraz na pravej strane rovnice je záporný, takže v rovnici pred ním musí byť záporné znamienko. Preto platí rovnica:

$$I\rho L = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3}$$

Teraz môžeme pristúpiť k určeniu napätia na voltmetri, postupne s uvážením pripojenia na jednotlivé úseky prstenca. Opäť budeme vychádzať z rovnice (2). Začneme kratším úsekom a – na ľavej časti obrázku. Integrál po uzavretej krivke rozdelíme na dva integrály,

$$\oint_K \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{PCQ}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,,$$

kde prvý z nich vyjadruje napätie na voltmetri a druhý napätie na úseku s dĺžkou a. Pri prúde I, ktorý ním tečie, musí byť na ňom napätie veľkosti $I\rho a$. Integrál je však záporný, lebo podľa dohodnutého smeru integrácie sa na tomto úseku integruje proti smeru indukovaného prúdu, vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sú orientované proti sebe. Dosadením do rovnice (2) dostaneme:

$$\int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - I\rho a = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\,,$$

pričom treba poznamenať, že pravá strana rovnice sa v tomto prípade týka len magnetického toku Φ_2 prechádzajúceho plochou mimo prstenca, ohraničenou časťou $\boldsymbol{a}$ prstenca a prívodmi k voltmetru. Pre napätie na voltmetri, vyjadrenom integrálom cez časť integračnej krivky prechádzajúci voltmetrom, tak dostaneme výsledok:

$$U_V = \int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I\rho a - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\,. \tag{4}$$

Teraz posúdime integračnú krivku prechádzajúcu cez časť $\boldsymbol{b}$ prstenca. Integrál z ľavej strany rovnice (2) opäť rozložíme na dva integrály:

$$\oint_K \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{PDQ}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

Prvý z dvojice opäť predstavuje napätie na voltmetri, druhý poskytne hodnotu $I\rho b = I\rho(L-a)$, tentoraz kladnú, lebo integrácia sa uskutočňuje v smere indukovaného prúdu. Pravá strana rovnice (2) v tomto prípade obsahuje deriváciu toku prechádzajúceho cez plochu ohraničenú prstencom, ale zväčšenú o plochu ohraničenú prívodmi k voltmetru. Rovnica (2) tak nadobudne tvar:

$$\int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + I\rho(L-a) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = I\rho L - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\,, \tag{5}$$

lebo podľa rovnice (3) : $-(\mathrm{d}\Phi_1)/\mathrm{d}t = I\rho L$. Pre napätie na voltmetri tak dostaneme

$$U_V = \int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I\rho L - I(L-a) - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\,,$$

a konečne:

$$U_V = \int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I\rho a - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6}$$

Takže sme dostali rovnaký výsledok ako v rovnici (4).

Ak budeme úsek a prstenca predlžovať, napätie namerané voltmetrom bude rásť a pri hodnote $a = L$ integračná krivka obsiahne obidva predtým uvažované toky. Vo vzťahoch (4) a (6) potom namiesto dĺžky a dosadíme dĺžku L, a zmenia sa aj hranice integrálu, lebo voltmeter je vtedy súčasťou veľkej slučky, cez ktorú prechádzajú obidve časti magnetického toku:

$$a \to L\,, \quad \int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \;\to\; \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

Takže napätie bude vyjadrené vzťahom:

$$U_V = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I\rho L - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\Phi_1 + \Phi_2)}{\mathrm{d}t}.$$

pričom sme využili vzťah (3).

Ak by $\Phi_2 = 0$, (napríklad keď prstenec tesne obopína veľmi dlhý solenoid), tak vzťahy (4) a (6) zhodne poskytnú výsledok:

$$U_V = \int_{\mathrm{QVP}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I\rho a\,,$$

a nie rozdielne výsledky, ako sa na prvý pohľad zdalo pri posudzovaní len podľa Ohmovho zákona.

SÚHRN VZŤAHOV

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie	$U_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
intenzita magnetickej sily $\boldsymbol{F_m}$	$\boldsymbol{E}_m = \dfrac{\boldsymbol{F_m}}{Q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$
napätie indukované medzi dvoma bodmi	$U_i = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$
definícia vlastnej a vzájomnej indukčnosti	$\Phi = LI$
napätie indukované zmenou prúdu v cievke s indukčnosťou L	$U_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$
energia magnetického poľa v okolí vodiča elektrického prúdu	$W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2} LI^2$
objemová hustota energie magnetického poľa	$w_m = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$
Maxwellove rovnice v diferenciálnom tvare	$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_v$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
Maxwellove rovnice v integrálnom tvare	$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_v$, $\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k I_k$
Maxwellove rovnice vo vákuu	$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \varepsilon_o \mu_o \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
objemová hustota energie elektromagnetického poľa	$w = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$

vektory $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{B}$ v prostredí	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_m$
materiálové vzťahy	$\boldsymbol{D} = \varepsilon\, \boldsymbol{E}\,, \quad \boldsymbol{B} = \mu\, \boldsymbol{H}$
vlnová rovnica	$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 x^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 y^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 z^2} = \varepsilon_o \mu_o \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$
vzťah medzi vektormi v rovinnej elektromagnetickej vlne	$\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E}$
Poyntingov vektor	$\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$
Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny	$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{i} \left(\dfrac{1}{\mu_{\mathrm{o}} c} \right) E^2 = \boldsymbol{i} (\varepsilon_o c) E^2 = \boldsymbol{i} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_o}{\mu_{\mathrm{o}}}} E^2$

SLOVNÍK

elektromagnetická indukcia – vznik (indukovaného) elektrického poľa v časovo premenlivom magnetickom poli

elektromagnetické vlnenie – oscilácie v elektromagnetickom poli šíriace sa priestorom, spojené s prenosom elektromagnetickej energie

energia magnetického poľa (v okolí vodiča prúdu) – energia, ktorú pripisujeme magnetickému poľu vytvorenému elektrickým prúdom; v okolí vodiča s vlastnou indukčnosťou L ktorým preteká prúd I je táto energia $(1/2)L\,I^2$

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie – zákon vyjadrujúci veľkosť indukovaného elektrického napätia v uzavretej slučke ako podiel zmeny magnetického toku prechádzajúceho plochou ohraničenou slučkou a príslušného časového intervalu, t. j. zmenu magnetického toku pripadajúcu na jednotkový časový interval

guľová vlna – vlna, ktorej vlnoplochy, vrátane čela vlny, majú guľový tvar

henry (H) – jednotka vlastnej a vzájomnej indukčnosti; vodič (cievka) má vlastnú indukčnosť 1H, keď vo vodiči pri zmene prúdu o 1 ampér za 1 sekundu, vzniká indukované elektrické napätie 1 volt; 1 H = 1 V·s/A

hustota energie elektromagnetického poľa (w) – elektromagnetická energia pripadajúca na jednotku objemu; skladá sa z elektrickej a magnetickej zložky; jednotka: joule na kubický meter (J/m^3)

hustota energie magnetického poľa (w_m) – podiel energie magnetického poľa a objemu v ktorom sa energia nachádza; jednotka: joule na kubický meter (J/m^3)

hustota toku elektromagnetickej energie (P_S) – podiel výkonu prenášaného elektromagnetickým vlnením (žiarením) a obsahu plochy (kolmej na smer šírenia), cez ktorú ho prenáša; jednotka: watt na štvorcový meter (W/m^2); po priradení smeru šírenia elektromagnetickej vlny tejto veličine, ide o Poyntingov vektor

indukované elektrické napätie (U_i) – elektrické napätie, ktoré vzniká elektromagnetickou indukciou; jednotka: volt (V)

indukovaný elektrický prúd – elektrický prúd, ktorý vzniká v uzavretom vodiči ako dôsledok elektromagnetickej indukcie

intenzita elektromagnetického vlnenia – alternatívny názov pre → hustotu toku elektromagnetickej energie

intenzita indukovaného elektrického poľa – podiel sily pôsobiacej na elektrický náboj a tohto náboja v indukovanom elektrickom poli; jednotka: newton na coulomb (N/C)

Lenzov zákon – zákon týkajúci sa elektromagnetickej indukcie, podľa ktorého indukované elektrické prúdy svojimi magnetickými účinkami pôsobia proti zmene ktorá ich vyvolala

Lenzovo pravidlo – alternatívny názov pre Lenzov zákon

materiálové vzťahy – vzťah $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ v dielektriku a $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ v magnetických látkach, v ktorých vystupujú konštanty ε resp. μ charakterizujúce príslušné prostredie (materiál).

Maxwellov posuvný prúd – elektrický prúd zavedený Maxwellom pri kompletizácii jeho štvrtej rovnice; plošná hustota Maxwellovho posuvného prúdu sa rovná $(\partial \boldsymbol{D}/\partial t)$, kde $\boldsymbol{D}$ je elektrická indukcia; nemá tepelné účinky, ale môže existovať aj vo vákuu, napríklad pri nabíjaní kondenzátora medzi jeho platňami vytvára magnetické pole

Maxwellove rovnice – štyri rovnice teórie elektromagnetického poľa, ktoré makroskopicky vyjadrujú jeho základné zákony; opisujú elektromagnetické javy v prostredí aj vo vákuu

objemová hustota energie magnetického poľa – dôslednejší názov pre → hustotu energie magnetického poľa

polarizácia elektromagnetickej vlny – zachovávanie roviny oscilácií vektora $\boldsymbol{E}$ v mieste pozorovania, alebo iná, pravidelne sa meniaca orientácie tejto roviny; ak sa poloha roviny oscilácií s časom nemení, ide o lineárne polarizovanú vlnu

Poyntingov vektor ($\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}$) – vektorová veličina svojou veľkosťou vyjadrujúca podiel výkonu prenášaného elektromagnetickým vlnením (žiarením) a obsahu plochy cez ktorú ho prenáša (plochu kolmú na smer šírenia); smer Poyntingovho vektora sa zhoduje so smerom šírenia elektromagnetickej energie; jednotka: watt na štvorcový meter ($\mathrm{W/m^2}$)

rovinná vlna – vlna, ktorej vlnoplochy sú rovinné; dostatočne dobre aproximuje skutočnú vlnu vo veľkej vzdialenosti od zdroja

rovnica kontinuity elektrického prúdu (rovnica spojitosti) – rovnica vyjadrujúca zákon zachovania elektrického náboja: $\operatorname{div} \boldsymbol{J} + (\partial \rho_v / \partial t) = 0$, kde $\boldsymbol{J}$ je hustota elektrického prúdu a ρ_v objemová hustota voľného elektrického náboja

rýchlosť elektromagnetických vĺn – rýchlosť zhodná s rýchlosťou svetla, vo vákuu vyjadrená vzťahom $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_o}$, kde ε_0 je elektrická konštanta, μ_o magnetická konštanta; vo vákuu nezávisí od frekvencie, v prostredí je menšia a závisí od frekvencie; rýchlosť svetla vo vákuu sa v súčasnosti považuje za fundamentálnu konštantu

toroid – útvar s tvarom podobným pneumatike

vlastná indukčnosť (L) – skalárna veličina charakterizujúca vlastnosť uzavretého vodiča (slučky), definovaná ako koeficient úmernosti L medzi prúdom I prechádzajúcim týmto vodičom a magnetickým tokom Φ, prechádzajúcim plochou ohraničenou vodičom, pričom tok bol vytvorený týmto prúdom: $\Phi = L\, I$; jednotka: henry (H)

vlnová rovnica – lineárna parciálna diferenciálna rovnica druhého rádu, s deriváciami podľa priestorových premenných a podľa času

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ktorej riešeniami sú rôzne druhy vĺn mechanických, alebo elektromagnetických. Veličina u predstavuje vo všeobecnosti výchylku (mechanickú, alebo elektrickú či magnetickú zložku elektromagnetickej vlny) a v fázovú rýchlosť vlnenia

vzájomná indukčnosť (M, L_{mn}) – skalárna veličina zavedená ako koeficient sprostredkujúci vzťah medzi dvomi vodičmi – elektrickým prúdom tečúcim jedným z vodičov a magnetickým tokom prechádzajúcim plochou ohraničenou druhým (uzavretým) vodičom: $\Phi_2 = L_{21} I_1$; jednotka: henry (H)

ÚLOHY

Elektromagnetická indukcia

1. Kruhový závit sa nachádza v homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor magnetickej indukcie je kolmý na rovinu závitu a smeruje k pozorovateľovi. Ktorým smerom bude tiecť indukovaný elektrický prúd závitom, keď sa veľkosť vektora magnetickej indukcie začne zmenšovať?

Výsledok: Z pohľadu pozorovateľa prúd bude tiecť proti pohybu hodinových ručičiek, elektróny sa budú pohybovať opačným smerom.

2. Cievka s N = 35 závitmi, každý má plošný obsah S = 150 cm^2, sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou B = 0,02 T. Je umiestnená tak, že vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na roviny závitov cievky. Cievka sa náhle otočí o π radiánov, okolo osi ktorá je kolmá na vektor $\boldsymbol{B}$. Aký elektrický náboj Q prejde cievkou, ak jej elektrický odpor R = 20 Ω?

Výsledok: $Q = (2BS)/R$.

3. Obdĺžnikový závit so stranami a = 15 cm, b = 20 cm a elektrickým odporom R = 5 Ω bol náhle vložený do magnetického poľa s indukciou B = 0,02 T, pričom vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ zvieral s normálou na rovinu závitu uhol $\beta = 60^\circ$. Aký veľký náboj pretiekol závitom?

Výsledok: $Q = (\Delta\Phi)/R = (B\, ab \cos\beta)/R$.

4. Obdĺžnikový rámček (závit) so stranami a = 5 cm, b = 15 cm je umiestnený v jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom tak, že jeho dlhšia strana je s ním rovnobežná a vzdialená od neho o c = 7 cm. Prúd tečúci dlhým vodičom sa s časom lineárne zmenšuje, v čase t_1 = 2 s ním tiekol prúd I_1 = 9 A, v čase t_2 = 6 s už len I_2 = 1 A. Vypočítajte, aké veľké elektrické napätie sa v závite indukuje počas poklesu prúdu vo vodiči.

Výsledok: $U_i = -\dfrac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1}\dfrac{\mu_o I b}{2\pi}\ln\dfrac{c+a}{c}$.

5. Obdĺžnikový rámček (závit) so stranami a = 5 cm, b = 15 cm je umiestnený v jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom tak, že jeho dlhšia strana je s ním rovnobežná a vzdialená od neho o c = 7 cm. Dlhým vodičom prechádza prúd I = 12 A . Závit sa začne vzďaľovať od vodiča rýchlosťou v = 8 m/s. Aké napätie sa v závite indukuje v okamihu začiatku pohybu?

Výsledok: $U_i = \dfrac{\mu_o I b}{2\pi}\dfrac{va}{(a+c+vt)(c+vt)}$.

6. Po slepej koľaji sa od jej konca vzďaľuje vozeň rýchlosťou v = 5 m/s. Vertikálna zložka homogénneho zemského magnetického poľa má veľkosť približne $B_v = 10^{-6}$ T. a) Ak by koľajnice boli na konci prepojené elektrickým odporom R = 20 Ω, aký elektrický prúd by ním tiekol, keď odpor koľajníc je zanedbateľný? b) Predná a zadná náprava vozňa spolu s koľajnicami medzi nápravami predstavuje pohybujúci sa obdĺžnikový závit. Indukuje sa v ňom pri pohybe vozňa elektrické napätie a vzniká v ňom indukovaný prúd? c) Prispievajú k prúdu prechádzajúcemu cez odpor obidve nápravy? (Rozchod koľajníc a = 1435 mm, vzdialenosť náprav vozňa b = 6 m.)

Výsledok: $I_i = (B_v a v)/R$. b) Indukované napätie sa rovná nule c) Nie.

7. Kovová tyčka, ktorá má dĺžku l = 1,5 m, je uchytená svojim koncom na horizontálnej osi, okolo ktorej sa môže voľne otáčať. Po vychýlení do vodorovnej polohy ju voľne pustíme, takže začne kmitať. Aké maximálne elektrické napätie sa indukuje medzi jej koncami, keď sa pohybuje v homogénnom magnetickom poli s intenzitou H = 1500 A/m, pričom vektor $\boldsymbol{H}$ je na rovinu jej otáčania kolmý?

Výsledok: $U_i = \mu_o H\sqrt{(3l^3 g)/4}$.

8. Popri veľmi dlhom priamom vodiči, ktorým prechádza elektrický prúd I = 15 A, sa v jednej rovine s ním pohybuje rýchlosťou v = 2 m/s kovová tyč dĺžky l = 1,5 m. Tyč je na vodič kolmá, bližší koniec je pri pohybe od vodiča stále vzdialený o b = 5 cm. Tyč sa pohybuje opačným smerom ako elektróny v dlhom vodiči. Aké veľké elektrické napätie sa indukuje medzi koncami tyče a na ktorom z jej koncov sa nahromadí záporný náboj?

Výsledok: $U_i = \dfrac{\mu_o I v}{2\pi}\ln\dfrac{b+l}{b}$. Záporný náboj bude na vzdialenejšom konci.

9. Od veľmi dlhého priameho vodiča, ktorým prechádza prúd I = 20 A, sa rýchlosťou v = 2 m/s vzďaľuje kovová tyč s dĺžkou l = 1,5 m, ktorá je s dlhým vodičom rovnobežná. Aké elektrické napätie sa indukuje medzi jej koncami, keď je od dlhého vodiča vo vzdialenosti b = 20 cm?

Výsledok: $U_i = \dfrac{\mu_o I}{2\pi b} v l$.

10. Kovová tyč, ktorá má dĺžku l = 1,5 m, rotuje v homogénnom magnetickom poli okolo osi, ktorá je na tyč kolmá a prechádza ňou vo vzdialenosti a = (1/3) l od jej konca. Uhlová rýchlosť tyče ω = 20 rad/s, veľkosť indukcie magnetického poľa B = 0,015 T. Aké elektrické napätie sa indukuje medzi jej koncami, ak vektor uhlovej rýchlosti tyče a vektor magnetickej indukcie sú súhlasne rovnobežné? Ktorý koniec tyče bude kladný?

Výsledok: $U_i = (1/6)\omega B l^2$. Kladný bude koniec vzdialenejší od osi.

Maxwellove rovnice

11. Ukážte, že v rovinnom kondenzátore možno Maxwellov posuvný prúd I_p vyjadriť v tvare $C(\mathrm{d}U/\mathrm{d}t)$, kde C je kapacita kondenzátora a U napätie medzi jeho platňami.

Návod: Využite vzťahy pre kapacitu kondenzátora a veľkosť elektrickej indukcie v kondenzátore s rovinnými platňami.

12. Rovinný kondenzátor s kruhovými platňami s priemerom 20 cm je nabíjaný vonkajším zdrojom, pričom kondenzátorom prechádza posuvný prúd s plošnou hustotou J_p = 20 A/m^2. Vypočítajte veľkosť magnetickej indukcie B medzi platňami vo vzdialenosti r = 50 mm od osi symetrie platní. Na tom istom mieste vypočítajte aj $\partial E/\partial t$.

Výsledok: Použiť zákon celkového prúdu (cirkulácia vektora ***H***)

$$a)\ B = \frac{\mu_o}{2} J_p r\,, \quad b)\ \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_o} J_p\,.$$

Elektromagnetické vlny

13. Vektor intenzity elektrického poľa elektromagnetickej vlny šíriacej sa vákuom je vyjadrený vzťahom $E = \boldsymbol{j}\, E_o \sin(\omega\, t - kx)$, kde E_o = 100 V/m, $\omega = 5\times10^8\ \mathrm{s}^{-1}$, $c = 3\times10^8$ m/s a $\boldsymbol{j}$ jednotkový ktorý má smer osi y. Vypočítajte a) frekvenciu f, vlnovú dĺžku λ a uhlové vlnové číslo $k = 2\pi/\lambda$ tejto vlny, b) amplitúdu jej magnetickej indukcie.

Výsledok: a) $f = \omega / 2\pi = 8 \times 10^7$ Hz, $\lambda = c/f = 3{,}75$ m, $k = 1{,}675\ \mathrm{m}^{-1}$

b) $B_o = E_o / \mathrm{c} = 3{,}3 \times 10^{-7}$ T .

14. Rovinná elektromagnetická vlna, ktorá má frekvenciu f = 50 MHz, sa šíri vákuom v smere osi x. Amplitúda elektrickej zložky tejto vlny je E_o = 120 V/m. Vypočítajte vlnovú dĺžku λ, vlnočet $\sigma = 1/\lambda$, uhlový vlnočet $k = 2\pi\sigma$ a maximálnu hodnotu (amplitúdu) magnetickej indukcie B_o tejto vlny.

Výsledok: a) $\lambda = c/f = 6$ m , $\sigma = 1/6\ \mathrm{m}^{-1}$, $k = \pi/3\ \mathrm{m}^{-1}$

b) $B_o = E_o / \mathrm{c} = 4 \times 10^{-7}$ T .

15. Pre súradnice vektora ***E*** rovinnej elektromagnetickej vlny platia vzťahy $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = 2 \cos[\pi \times 10^{15} (t - x/c)]$.

Vypočítajte frekvenciu f a vlnovú dĺžku λ vlny. Napíšte vzťahy pre súradnice zodpovedajúceho ***B*** vektora.

Výsledok: a) $f = \omega/2\pi = \pi \times 10^{15} / 2\pi = 5 \times\cdot 10^{14}$ Hz , $\lambda = c/f = 6 \times 10^{-7}$ m.

b) $B_x = 0$, $B_y = [2/(3\times10^8)] \cos[\pi \times 10^{15} (t - x/c)]$, $B_z = 0$.

16. Elektromagnetická vlna šíriaca sa v zápornom smere osi y má v istom mieste a v istom čase vektor $\boldsymbol{E}$ smerujúci v kladnom smere osi z, pričom jeho veľkosť je 150 V/m. Aká je veľkosť a aký je smer vektora $\boldsymbol{B}$ v rovnakom mieste a rovnakom čase?

Výsledok: Vektor $\boldsymbol{B}$ smeruje k záporným hodnotám osi x, $B = 150/(3\times10^8)$ T.

17. Pomocou konštánt ε_o a μ_o vypočítajte rýchlosť šírenia elektromagnetických vĺn vo vákuu a ukážte, že výsledok je správny aj rozmerovo.

Návod: $c = 1/(\varepsilon_o\,\mu_o)^{1/2}$.

18. Aká má byť frekvencia f vysielača elektromagnetických vĺn , aby ich vlnová dĺžka λ_1 vo vode ($\varepsilon_{r1} = 81$, $\mu_{r1} = 1$) bola jedna tretina metra? Aká bude vlnová dĺžka λ_2 týchto vĺn vo vzduchu ($\varepsilon_{r2} = 1$, $\mu_{r2} = 1$)? Vypočítajte pomer týchto vlnových dĺžok.

Návod: Rýchlosť elektromagnetickej vlny v prostredí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\varepsilon_r\mu_o\mu_r}}\ ,\quad f = \frac{v}{\lambda_1}\,,\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{9}\,.$$

19. Ukážte, že v ľubovoľnom bode elektromagnetickej vlny časovo stredná hodnota objemovej hustoty energie elektrického poľa sa rovná časovo strednej hodnote objemovej hustoty energie magnetického poľa.

Návod: Použite vzťahy pre objemovú hustotu energie týchto polí a vzťah medzi vektormi intenzity elektrického poľa a magnetickej indukcie v rovinnej elektromagnetickej vlne.

Poyntingov vektor (intenzita elektromagnetického vlnenia)

20. Dokážte, že stredná hodnota intenzity rovinnej monochromatickej vlny I_S (t. j. Poyntingovho vektora $\boldsymbol{P}_S$) sa dá vyjadriť výrazom $I_s = (1/2)\,\varepsilon_o\,E_o^2\,c$, alebo $I_s = B_o^2\,c/(2\mu_o)$, kde E_o a B_o sú amplitúdy elektrickej, resp. magnetickej zložky elektromagnetickej vlny.

Návod: Vychádzajte z definície Poyntingovho vektora a použite vzťah medzi vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ rovinnej vlny. Vypočítajte strednú hodnotu Poyntingovho vektora za jednu periódu.

21. Vypočítajte strednú hodnotu intenzity I_S (t. j. Poyntingovho vektora $\boldsymbol{P_S}$) rovinnej harmonickej elektromagnetickej vlny, keď veľkosť jej vektora $\boldsymbol{E}$ sa mení podľa vzťahu $E = E_o \sin(\omega t - kx)$, kde $E_o = 120$ V/m a frekvencia vlny $f = 50$ MHz. ($\varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m). Ukážte, že použitý vzťah je rozmerovo správny.

Výsledok: $I_S = (1/2)\, \varepsilon_o E_o^2\, c$.

22. Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny (vo vákuu) je vyjadrený vzťahom $\boldsymbol{P_S} = \boldsymbol{j}\, I_o \sin^2(\omega t - ky)$, kde $I_o = 220$ W/m^2, $\omega = 3{,}6 \times 10^9$ rad/s, $k = 12$ m^{-1}, $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor.

Aký je smer šírenia vlny? Aká je vlnová dĺžka λ a frekvencia f vlny? Napíšte výrazy pre časovú a priestorovú závislosť vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ tejto elektromagnetickej vlny.

Výsledok: vlna sa šíri v smere osi y ; $\lambda = 2\pi/k$, $f = \omega/2\pi$;

Napríklad $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}(I_o/\varepsilon_o)^{1/2} \sin(\omega t - ky)$, $\boldsymbol{B} = (-\boldsymbol{k})\,(\mu_o I_o) \sin(\omega t - ky)$.

23. Aká musí byť amplitúda P_S Poyntingovho vektora rovinnej elektromagnetickej vlny, aby amplitúda B_o jej magnetickej zložky dosiahla 10^{-4} T?

Výsledok: $P_S = cB_o^2/\mu_o$.

24. Bodový zdroj elektromagnetického žiarenia má priemerný výkon $P_w = 800$ W. Vypočítajte amplitúdy intenzity elektrického poľa E_o a magnetickej indukcie B_o v bode vzdialenom $r = 35$ m od zdroja, v ktorom môžeme lokálne považovať vlnu približne za rovinnú. ($\varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m)

Výsledok: $I_{\text{lok}} = P_w / \pi r^2$, $E_o = (2\, I_{\text{lok}} / (\varepsilon_o c))^{1/2}$, $B_o = (2\, I_{\text{lok}}\, \mu_o / c)^{1/2}$.

25. Dlhým priamym vodivým drôtom s elektrickým odporom R, priemerom d a dĺžkou l prechádza elektrický prúd I. Dokážte, že energia elektromagnetického poľa vstupujúca do objemu vodiča za jednotku času (cez jeho plášť) sa rovná Joulovmu teplu uvoľnenému za jednotku času RI^2.

Návod: Do vzťahu pre Poyntingov vektor dosaďte hodnoty vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ na povrchu vodiča, intenzitu el. poľa počítajte z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare a intenzitu magnetického poľa z cirkulácie vektora $\boldsymbol{H}$.

26. Slnečné žiarenie dopadá kolmo na pracovnú plochu zariadenia na premenu slnečnej energie na teplo. Účinnosť zariadenia je 50 % ($\eta = 0{,}5$) a dodáva priemerný výkon $P_1 = 80$ kW. Rozmery pracovnej plochy pokrytej dokonalým absorbátorom sú $S = 160$ m^2. Vypočítajte aký priemerný výkon P_s prináša slnečné žiarenie na 1 m^2 Zeme v mieste zariadenia.

Výsledok: $P_s = P_1/(S\eta)$.

27. Parabolická anténa v Arecibo má v priemere d = 300 m. Toto mimoriadne citlivé zariadenie je schopné zaregistrovať elektromagnetické vlny, ktoré na povrch Zeme (t. j. kruh s polomerom Zeme) prinášajú žiarivý tok Φ_o = 1 pW.
Akej intenzite I_1 vlnenia to zodpovedá (t. j. koľko wattov by dopadalo na 1 m^2 povrchu Zeme)? Aký žiarivý tok Φ_1 vtedy zachytáva anténa (t. j. koľko wattov)?
c) Aký výkon P_w by musel vyžarovať zdroj v strede našej Galaxie, aby poskytol rovnako intenzívny signál? (Vzdialenosť Zeme od stredu Galaxie je približne 3×10^4 svetelných rokov, vzdialenosť v metroch vypočítajte.)

Výsledok: $I_1 = 7{,}77 \times 10^{-27}$ W/m^2, $\Phi_1 = 5{,}49 \times 10^{-22}$ W, $P_w = 7{,}85 \times 10^{15}$ W.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice
Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatesví, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II , 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovitš V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do štatist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A. V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I. V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski-Krakau-Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov
Sacharov D. I., Kosminkov I.S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje
Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

Ivan Červeň, Peter Bokes

Fyzika po kapitolách, časť 11.
Elektromagnetické pole

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo vydavateľstve STU SPEKTRUM v roku 2023

Rozsah 58 strán, 16 obrázkov, 3 tabuľky,
3,002 AH, 3,122 VH

85 – 227 – 23

ISBN 978-80-227-5354-8